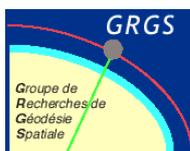


Le Champ de Gravité

Richard BIANCALE, CNES DSO/GS/GTP

- **représentation**
- **attraction gravitationnelle planétaire**
- **les marées terrestres et océaniques**

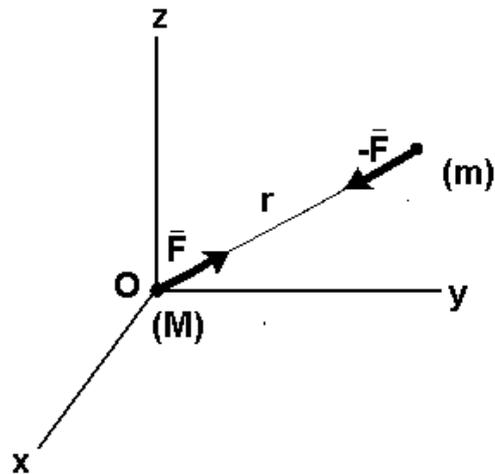


Ecole de Géodésie Spatiale 2-6 Septembre 2002 Forcalquier

Le champ de gravité de la Terre

Toute la théorie du champ de gravité repose sur la loi de la gravitation universelle énoncée par I. Newton en 1666 :

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$



Le point M crée en tout point de l'espace un champ dit newtonien qui dérive du potentiel :

$$U = \frac{GM}{r}$$

tel que :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -GM \frac{x}{r^3} \\ \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} = -GM \frac{y}{r^3} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} = -GM \frac{z}{r^3} \end{cases}$$

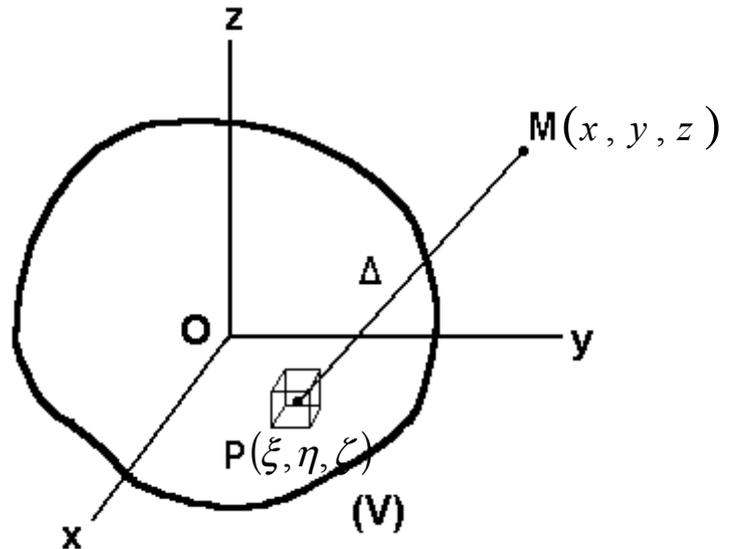
Ce potentiel vérifie l'équation de Laplace (1785):

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Cas de la Terre inhomogène

Le potentiel créé en $M(x,y,z)$ par l'ensemble des points de la Terre $P(\xi, \eta, \zeta)$ s'exprime :

$$U = \iiint_V \frac{G}{\Delta} dm$$



où $dm = \delta(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$

et $\Delta = PM = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

Il satisfait l'équation de Laplace en tout point extérieur au corps :

$$\nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

A l'intérieur du corps, les dérivées secondes sont liées par l'équation de Poisson :

$$\nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi G\rho ,$$

(ρ : densité au point considéré)

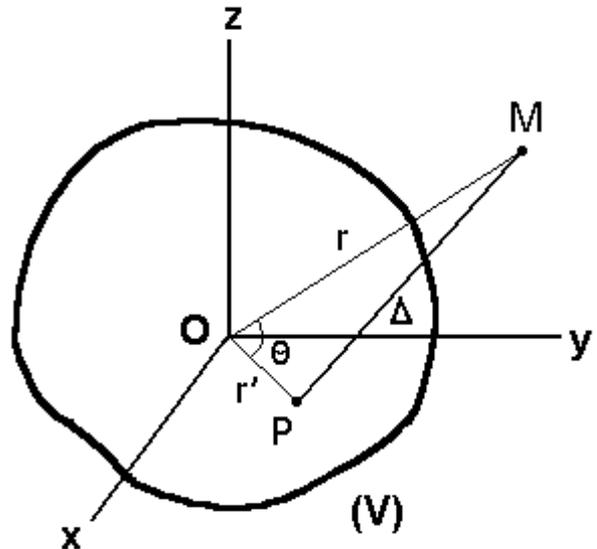
Modélisation du potentiel gravitationnel

Soit : $V = \frac{r}{\Delta}$ et $\rho = \frac{r'}{r}$;

on a dans le triangle MOP:

$$\Delta^2 = r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2$$

et donc :
$$V = \frac{1}{(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2)^{1/2}}$$



V est développable en série entière de ρ , convergente pour $\rho < 1$:

$$V = P_0 + \rho P_1 + \rho^2 P_2 + \dots + \rho^n P_n + \dots$$

ou les P_n sont les polynômes de Legendre de degré n en $\cos \theta$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \cos^{n-2k} \theta$$

V est une fonction harmonique à l'extérieur du domaine (V), c'est à dire :

- elle a ses dérivées secondes continues,
- son Laplacien $\nabla^2 V$ est nul.

P_n est un polynôme harmonique de degré n qui vérifie :

- l'équation différentielle :
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

- la propriété d'orthogonalité :
$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{n,m}}{2n+1}$$

Les polynômes de Legendre (1783)

Solution de l'équation différentielle de Legendre:

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]}{dx} + n(n+1)P_n = 0 \quad \text{pour } x \in [-1,+1]$$

soit :

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0$$

$$P_n(x) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \dots \right]$$

ou si l'on pose $x = \cos \theta$:

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \cos^{n-2k} \theta$$

soit encore:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= 2 \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \left[\cos n\theta + \frac{n}{(2n-1)} \cos(n-2)\theta + \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(2k)!(2n-2k)!}{2^{2n-1} k!^2 (n-k)!^2} \cos(n-2k)\theta \end{aligned}$$

Expressions littérales jusqu'au degré 7 :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x = \cos \theta$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 = (3 \cos 2\theta + 1)/4$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2 = (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta)/8$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 = (35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9)/64$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8 = (63 \cos 5\theta + 35 \cos 3\theta + 30 \cos \theta)/128$$

$$P_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16 = (231 \cos 6\theta + 126 \cos 4\theta + 105 \cos 2\theta + 50)/512$$

$$P_7(x) = (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)/16 = (429 \cos 7\theta + 231 \cos 5\theta + 189 \cos 3\theta + 175 \cos \theta)/1024$$

Polynômes bornés entre [-1,+1] :

$$P_n(1)=1$$

$$P_n(-1)=(-1)^n$$

$$P_n(0)=0, \text{ pour } n \text{ impair}$$

$$P_n(0)=(-1)^{n/2} \frac{1.3.5\dots(n-1)}{2.4\dots n} = (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n (n/2)!^2}, \text{ pour } n \text{ pair}$$

Formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Formules de récurrence :

$$nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n+1)P_{n-2} = 0$$

ou :

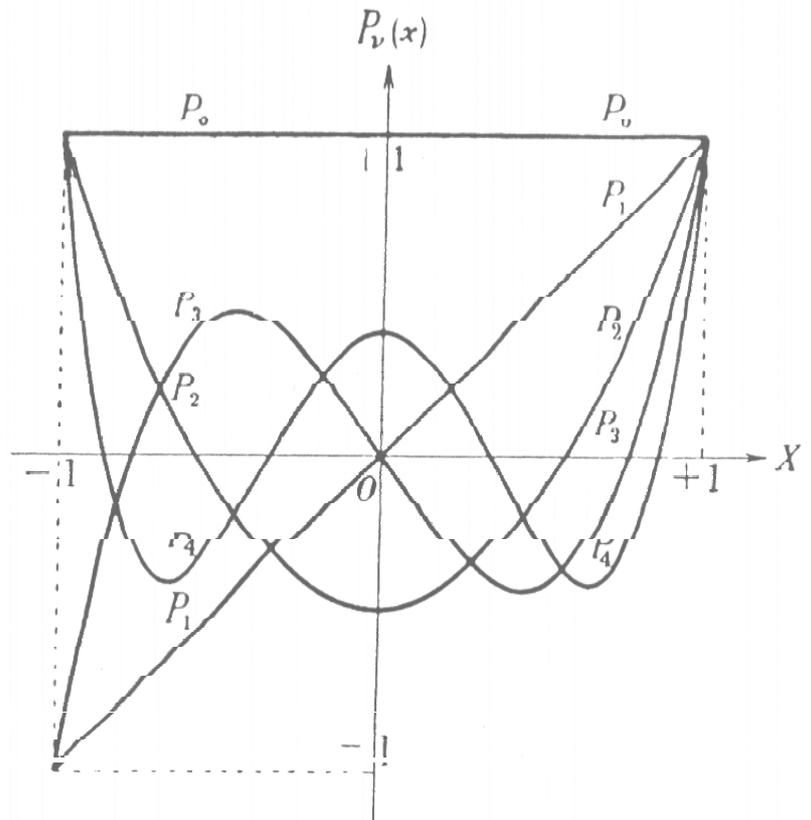
$$(n+1)(P_{n+1} - xP_n) - n(xP_n - P_{n-1}) = 0$$

Dérivation :

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(xP_n - P_{n-1})$$

ou :

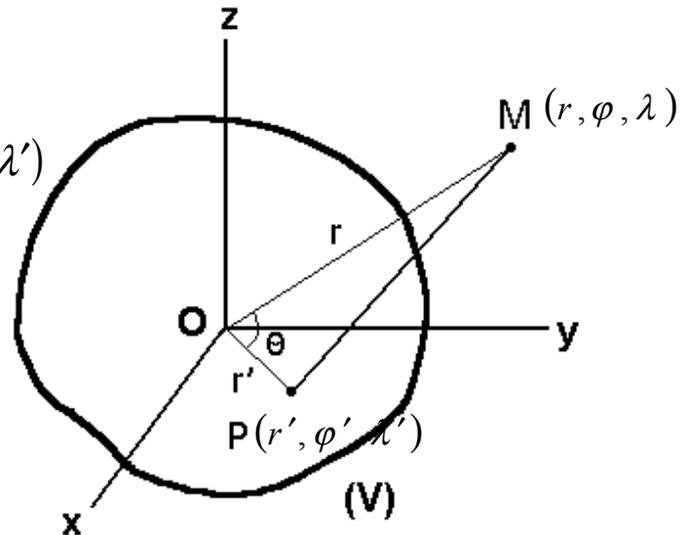
$$(2n+1)(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1})$$



Passage en coordonnées sphériques

Par trigonométrie sphérique entre $P(r', \varphi', \lambda')$ et $M(r, \varphi, \lambda)$, on établit la relation :

$$\cos \theta = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')$$



Chaque polynôme harmonique $P_n(\cos \theta)$ vérifie l'équation de Laplace qui, exprimée en coordonnées polaires, vaut:

$$r^2 \nabla^2 P_n = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 P_n}{\partial \lambda^2} = 0$$

dont une solution est :

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\sin \varphi) P_n(\sin \varphi') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\sin \varphi) P_{n,m}(\sin \varphi') \cos m(\lambda - \lambda')$$

$P_{n,m} \cos m\lambda$ et $P_{n,m} \sin m\lambda$ sont des fonctions harmoniques sphériques de degré n et d'ordre m . Les fonctions de Legendre $P_{n,m}$ vérifient :

- l'équation différentielle :
$$P_{n,m}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}$$

- la propriété d'orthogonalité :
$$\int_{-1}^{+1} P_{n,m}(x) P_{k,m}(x) dx = \frac{2 \delta_{n,m} (n-m)!}{2n+1 (n+m)!}$$

Les fonctions associées de Legendre (de premier type)

Solution de l'équation de Legendre m fois différenciée :

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_{n,m}}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dP_{n,m}}{dx} + (n-m)(n+m+1)P_{n,m} = 0 \quad \text{pour } x \in [-1,+1] \text{ et } n \geq m \geq 0$$

$$P_{n,m}(x) = (-1)^m \frac{(2n)!}{2^n n!(n-m)!} (1-x^2)^{m/2} \left[x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} x^{n-m-2} + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-3)(n-m-4)}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-m-4} - \dots \right]$$

ou si l'on pose $x = \cos \theta$:

$$P_{n,m}(\cos \theta) = \frac{(-1)^m}{2^n} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} \cos^{n-m-2k} \theta$$

ou encore:

$$P_{n,m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!} \sin^m \theta \left[\cos^{n-m} \theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2m+2)} \cos^{n-m-2} \theta \sin^2 \theta + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-3)(n-m-4)}{2.4(2m+2)(2m+4)} \cos^{n-m-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \right]$$

$$= (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m} \sin^m \theta \sum_{k=0}^{(n-m)/2} (-1)^k \frac{1}{2^{2k} k!(m+k)!(n-m-2k)!} \cos^{n-m-2k} \theta \sin^{2k} \theta$$

on vérifie : $P_{n,0}(x) = P_n(x)$

Expressions littérales jusqu'au degré et ordre 4 :

$$P_{1,0}(x) = P_1(x) = 1$$

$$P_{1,1}(x) = 3(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_{2,1}(x) = 3x(1-x^2)^{1/2}, \quad P_{2,2}(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_{3,1}(x) = \frac{15}{2}(1-x^2)^{1/2} \left(x^2 - \frac{1}{5} \right), \quad P_{3,2}(x) = 15(1-x^2), \quad P_{3,3}(x) = 15(1-x^2)^{1/2} (1-x^2)^{3/2}$$

$$P_{4,1}(x) = \frac{35}{2}(1-x^2)^{1/2} \left(x^3 - \frac{3}{7}x \right), \quad P_{4,2}(x) = \frac{105}{2}(1-x^2) \left(x^2 - \frac{1}{7} \right), \quad P_{4,3}(x) = 105x(1-x^2)^{3/2},$$

$$P_{4,4}(x) = 105(1-x^2)^2$$

Valeurs aux bornes et au centre:

$$P_{n,m}(1) = 0$$

$$P_{n,m}(-1) = 0$$

$$P_{n,m}(0) = 0, \text{ pour } n-m \text{ impair}$$

$$P_{n,m}(0) = (-1)^{(n-m)/2} \frac{(n+m)!}{2^n ((n+m)/2)! ((n-m)/2)!}, \text{ pour } n-m \text{ pair}$$

$$\text{remarque: } P_{n,-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

Formules de récurrence :

par degré :

$$(2n+1)xP_{n,m} - (n-m+1)P_{n,m+1} + (n+m)P_{n-1,m} = 0$$

ou :

$$(n-m+2)P_{n+2,m} - (2n+3)xP_{n+1,m} - (n+m+1)P_{n,m} = 0$$

(

par ordre :

$$P_{n,m+2} - (2m+1) \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} P_{n,m+1} + (n-m)(n+m+1)P_{n,m} = 0$$

Formules différentielles :

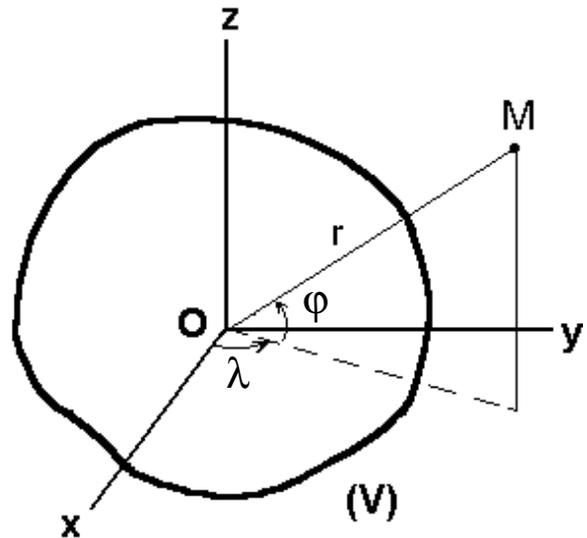
$$P_{n,m}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

soit :

$$P_{n,m}(x) = (-1)^m \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m} (x^2-1)^n}{dx^{n+m}}$$

Développement du potentiel terrestre en harmoniques sphériques

$$U = \iiint_V \frac{G}{\Delta} dm = \frac{G}{r} \iiint_V V dm$$



V étant développable en harmoniques sphériques, on obtient :

$$U = \frac{GM}{a_e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\sin \varphi) (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda)$$

où :

$$Ma_e^n \begin{Bmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{Bmatrix} = \iiint_V (2 - \delta_{n,0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} r'^n P_{n,m}(\sin \varphi') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} dm$$

$$GM = 398600.4415 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

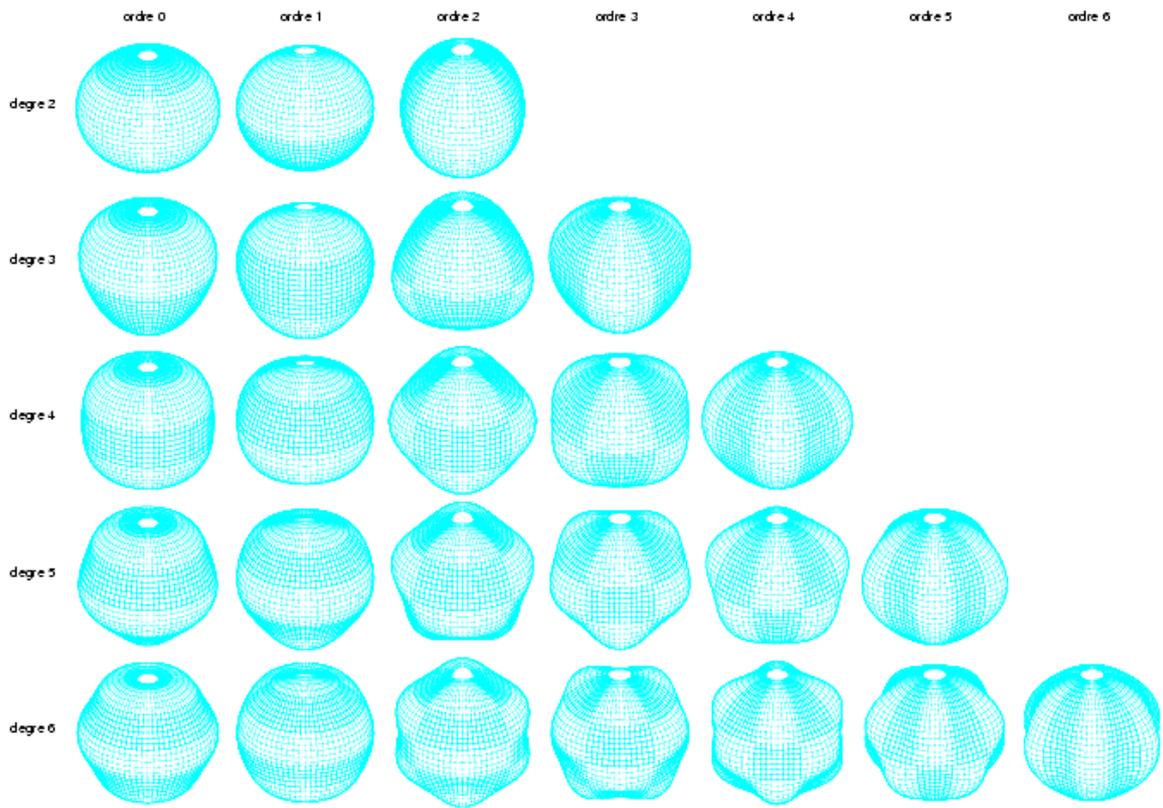
$$a_e = 6378136.46 \text{ m}$$

Les termes $C_{n,0}$ ($= -J_n$) sont les coefficients de Stokes des harmoniques zonales ;

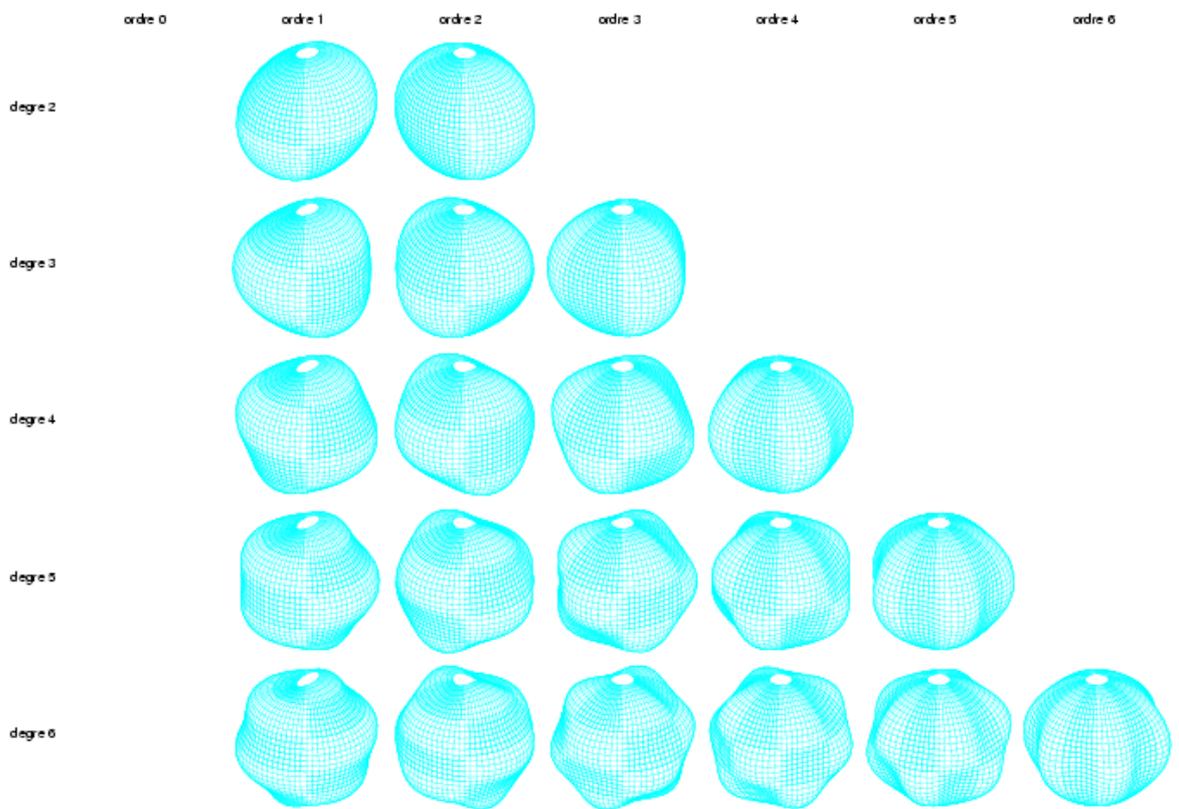
les termes $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ sont les coefficients de Stokes des harmoniques tessérales ;

les termes $C_{n,n}$, $S_{n,n}$ sont les coefficients de Stokes des harmoniques sectorielles.

Harmoniques $P_{lm} \cos$



Harmoniques $P_{lm} \sin$



Expression des premiers coefficients de Stokes

Degré 0 :

$$C_{0,0} = \frac{1}{M} \iiint dm = 1$$

Le degré 0 agit comme facteur d'échelle de la masse conventionnelle M de la Terre.

Degré 1 :

$$\begin{aligned} C_{1,0} &= \frac{1}{Ma_e} \iiint r' P_{1,0}(\sin \varphi') dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint r' \sin \varphi' dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint z' dm \\ &= \frac{1}{Ma_e} \iiint z' dm = \frac{z_G}{a_e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= \frac{1}{Ma_e} \iiint r' P_{1,1}(\sin \varphi') \cos \lambda' dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint r' \cos \varphi' \cos \lambda' dm \\ &= \frac{1}{Ma_e} \iiint x' dm = \frac{x_G}{a_e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \frac{1}{Ma_e} \iiint r' P_{1,1}(\sin \varphi') \sin \lambda' dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint r' \cos \varphi' \sin \lambda' dm \\ &= \frac{1}{Ma_e} \iiint y' dm = \frac{y_G}{a_e} \end{aligned}$$

Le degré 1 définit le centre des masses G de la Terre tel que :

$$G \begin{cases} x_G = a_e C_{1,1} \\ y_G = a_e S_{1,1} \\ z_G = a_e C_{1,0} \end{cases}$$

Degré 2 :

$$C_{2,0} = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V r'^2 P_{2,0}(\sin \varphi') dm = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V r'^2 \frac{(3 \sin^2 \varphi' - 1)}{2} dm$$

$$= \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V \left[z'^2 - \left(\frac{x'^2 + y'^2}{2} \right) \right] dm = \frac{(I_{xx} + I_{yy})/2 - I_{zz}}{Ma_e^2}$$

$$C_{2,1} = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V \frac{1}{3} r'^2 P_{2,1}(\sin \varphi') \cos \lambda' dm = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V r'^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \cos \lambda' dm$$

$$= \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V x' z' dm = \frac{-I_{xz}}{Ma_e^2}$$

$$S_{2,1} = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V \frac{1}{3} r'^2 P_{2,1}(\sin \varphi') \sin \lambda' dm = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V r'^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \sin \lambda' dm$$

$$= \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V y' z' dm = \frac{-I_{yz}}{Ma_e^2}$$

$$C_{2,2} = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V \frac{1}{12} r'^2 P_{2,2}(\sin \varphi') \cos 2\lambda' dm = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V \frac{1}{4} r'^2 \cos^2 \varphi' \cos 2\lambda' dm$$

$$= \frac{1}{4Ma_e^2} \iiint_V (x'^2 - y'^2) dm = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{4Ma_e^2}$$

$$S_{2,2} = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V \frac{1}{12} r'^2 P_{2,2}(\sin \varphi') \sin 2\lambda' dm = \frac{1}{Ma_e^2} \iiint_V \frac{1}{4} r'^2 \cos^2 \varphi' \sin 2\lambda' dm$$

$$= \frac{1}{2Ma_e^2} \iiint_V x' y' dm = \frac{-I_{xy}}{2Ma_e^2}$$

Le degré 2 conditionne le tenseur d'inertie I de la Terre :

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = Tr(I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Ma_e^2 \begin{pmatrix} C_{2,0}/3 + 2C_{2,2} & -2S_{2,2} & -C_{2,1} \\ -2S_{2,2} & C_{2,0}/3 - 2C_{2,2} & -S_{2,1} \\ -C_{2,1} & -S_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$$

La normalisation

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{\ell} P_{\ell m}(\sin \varphi) (C_{\ell m} \cos m\lambda + \delta_{\ell m} \sin m\lambda)$$

$$= \frac{GM}{a_e} R_e \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{\ell+1} (C_{\ell m} - i S_{\ell m}) H_{\ell m}(\sin \varphi, \lambda) \right]$$

avec : $H_{\ell m}(\varphi, \lambda) = P_{\ell m}(\sin \varphi) \exp(im\lambda)$

$H_{\ell m}$: harmonique de surface (de Laplace)

$C_{\ell m}, S_{\ell m}$: coefficients harmoniques sphériques (de Stokes)

Orthogonalité sur la sphère de rayon unité :

$$\int_S H_{\ell m}(\varphi, \lambda) \cdot H_{\ell' m'}(\varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = 0$$

si $\ell \neq \ell'$ ou $m \neq m'$

Normalité sur la sphère de rayon unité :

$$\int_S [H_{\ell m}(\varphi, \lambda)]^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = \frac{4\pi}{\Pi_{\ell m}^2}$$

$$\text{avec } \Pi_{\ell m}^2 = (2 - \delta_{0m})(2\ell + 1) \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}$$

Harmonique normalisée : $\bar{H}_{\ell m} = \Pi_{\ell m} H_{\ell m}$

Coefficient normalisé : $\bar{C}_{\ell m} = \frac{C_{\ell m}}{\Pi_{\ell m}}$

$$\text{d'où : } Ma_e^k (\bar{C}_{\ell m} + i \bar{S}_{\ell m}) = \frac{1}{2\ell + 1} \int_V r'^{\ell} \bar{H}_{\ell m}(\varphi', \lambda') \, dm$$

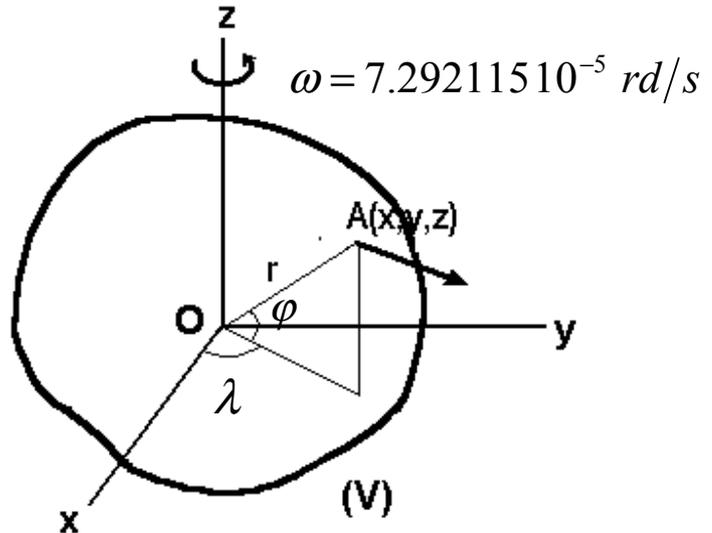
ou en posant $dm = \delta r'^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi \, dr'$:

$$Ma_e^k (\bar{C}_{\ell m} + i \bar{S}_{\ell m}) = \frac{1}{2\ell + 1} \int_S \bar{H}_{\ell m}(\varphi', \lambda') \left[\int_0^{a_e} \delta r'^{\ell-2} \, dr' \right] \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi$$

Le potentiel de pesanteur

La Terre étant en rotation, chaque point de sa surface est soumis, outre à l'attraction gravitationnelle, à la force centrifuge de composantes :

$$F_c \begin{cases} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ 0 \end{cases}$$



qui dérive du potentiel :

$$U_c = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi$$

Le potentiel de pesanteur est donc à la surface de la Terre :

$$W = \iiint_{\Delta} \frac{G}{\Delta} dm + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi$$

Le volume (V) est limité par la surface topographique sur laquelle sont effectuées les mesures de pesanteur. Liées à des mesures de nivellement, elles donnent accès à la forme de la Terre en terme de surface équipotentielle, ou géoïde, qui est la surface fondamentale en géodésie.

L'ellipsoïde de référence

La Terre est en première approximation un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles : l'écart entre les rayons équatorial et polaire est d'environ 21 km, soit 3% du rayon :

$$a = 6378136,46 \text{ m}$$

$$b = 6356751,73 \text{ m}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{a-b}{a} \quad , \text{aplatissement } (f = 298,25765)$$

$$\frac{1}{f} \cong \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a^3}{GM} \quad , \text{formule de Clairault}$$

La référence du géoïde à un ellipsoïde de révolution voisin est historique, mais demeure d'un grand intérêt pour assimiler les discordances à des infiniments petits du premier ordre. Pour cela, il faut définir un ellipsoïde de référence qui satisfait à la fois à des conditions géométriques et dynamiques pour que sa surface soit équipotentielle de son propre champ :

- son centre de gravité coïncide avec celui de la Terre ;
- son axe de révolution est confondu à celui de la Terre;
- il est en rotation à la vitesse de rotation de la Terre ;
- sa masse est égale à la masse de la Terre (avec l'atmosphère);

On démontre qu'il vaut :

$$V = 3GM \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{r^{2n+1}} e^{2n} \frac{1-n+5nJ'_2}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi$$

avec : $J'_2 = \frac{J_2}{e^2}$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{f} \left(2 - \frac{1}{f} \right)$$

Le potentiel normal V est donc égal à celui du géoïde.

La forme ellipsoïdale correspond avec une très bonne approximation au cas d'une masse fluide homogène en rotation uniforme dont l'aplatissement hydrostatique : 1/297,3 serait toutefois légèrement différent de l'aplatissement de la Terre. Cet aplatissement hydrostatique déterminée par l'équation différentielle de Clairaut (1743) fait abstraction de la connaissance de la répartition de densité.

La pesanteur normale γ , modèle de g , est définie par :

$$\bar{\gamma} = \text{grad } V$$

Son module sur l'ellipsoïde est donné par la **formule de Somigliana** en fonction de la latitude :

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

où γ_e et γ_p sont les pesanteurs normales à l'équateur et au pôle :

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m e' q'_0}{6 q_0} \right) \approx 9,780 \text{ m/s}^2$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m e' q'_0}{3 q_0} \right) \approx 9,832 \text{ m/s}^2$$

avec :

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{2e'}$$

$$q'_0 = 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1$$

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad , \quad e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Le géoïde

Le géoïde est la surface de niveau équipotentielle de pesanteur par rapport à laquelle les variations de la surface topographique océanique sont de moyenne nulle.

Les lignes de forces (orientées comme le fil à plomb) portent le vecteur gravité :

$$g = -\frac{\partial W}{\partial h} \cong \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R \cos^2 \varphi \quad \text{au premier ordre}$$
$$\cong 9,80 - 0,03 \cos^2 \varphi \quad (m/s^2)$$

La hauteur h au-dessus du géoïde selon la ligne de force est appelée **altitude orthométrique**.

Considérant une Terre sphérique et sans rotation, on aurait en première approximation :

$$\frac{dg}{dh} = -2 \frac{GM}{R^3} = -2 \frac{g}{R}, \text{ soit une variation relative : } \frac{\Delta g}{g} = -2 \frac{h}{R}$$

En tenant compte de l'aplatissement et de la rotation, la pesanteur à la surface s'exprime, en mGal ($= 10^{-5} \text{ m/s}^2$), en fonction de la latitude φ :

$$g = 978032,7 (1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi)$$

et sa variation en fonction de l'altitude h (en m), appelée aussi **correction à l'air libre**, vaut :

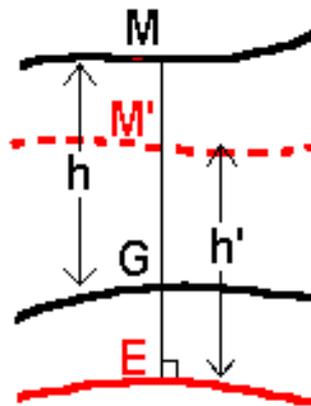
$$\Delta g = -0,30857 h - 0,00021 h \cos 2\varphi + 0,072 10^{-6} h^2 \quad (mGal)$$

En fait, ces valeurs dérivent du champ de l'ellipsoïde de référence; elles correspondent à un modèle et seront dénommée dans la suite pesanteur normale γ .

Les anomalies de pesanteur

L'**anomalie à l'air libre** est l'écart entre la pesanteur mesurée en un point et la pesanteur normale au point correspondant du modèle de l'ellipsoïde, c'est à dire de la surface hypsométrique, lieu des points ayant dans le champ de pesanteur du modèle même potentiel que les points correspondants de la surface topographique :

$$\Delta g = g_M - \gamma(M')$$



surface topographique

$$W_M$$

surface hypsométrique

$$V(M') = W_M$$

géoïde $W_G = W_0$

ellipsoïde $V(E) = W_0$

Par définition :

$$GM = \frac{W_0 - W_M}{g_m} = \frac{V(E) - V(M')}{g_m} \text{ est l'altitude orthométrique en M (normale au géoïde)}$$

$$EM' = \frac{V(E) - V(M')}{\gamma_m} = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m} \text{ est l'altitude normale en M' (normale à l'ellipsoïde)}$$

où γ_m est la valeur moyenne de la pesanteur normale à l'altitude $h/2$:

$$\gamma_m = \gamma(E) \left(1 - \frac{h'}{r} \right)$$

Au premier ordre, on pose : $g_m = \gamma_m$, donc $GM = EM'$ ($h = h'$), et par suite :

$$\Delta g = g_M - \gamma(M') = -\frac{\partial(W_M - V(M'))}{\partial h} = -\frac{\partial(W_0 - V(E))}{\partial h} = g_G - \gamma(E)$$

Remarques :

- les anomalies à l'air libre sont à la fois anomalies de pesanteur et de gravité puisque l'accélération centrifuge s'élimine ;
- la surface obtenue en portant sous la surface topographique des longueurs égales aux altitudes normales est dénommée **quasi-géoïde**. Il est lié à la Terre réelle et non au modèle. Ce n'est pas en général une équipotentielle (notamment sur les reliefs, lorsque $h \neq h'$ au second ordre) ;
- les anomalies à l'air libre sont fortement corrélées avec le relief au même titre que la pesanteur puisque la valeur de g en un point est influencée avant tout par les masses situées au voisinage de sa verticale. Elles se prêtent donc peu à l'interpolation ou à l'obtention de moyenne dans les zones à fort relief ;
- pour cela, on définit les **anomalies de Bouguer** qui tiennent compte du relief émergé et de sa densité (en général : 2,67) par adjonction de la correction de Bouguer au modèle de l'ellipsoïde. La **correction de Bouguer** principale, ou **correction de plateau** vaut:

$$\Delta g_B = 2\pi G d h = \frac{3}{2} g \frac{h}{R} \frac{d}{D_m} = 0,1119 h \quad (mGal)$$

d : densité de la croûte (= 2,67), D_m : densité moyenne de la Terre (= 5,52)

Elle s'obtient en calculant l'attraction d'un cylindre vertical au centre d'une de ses faces et en faisant tendre son rayon vers l'infini. Cette correction fait disparaître la corrélation avec le relief, mais introduit une corrélation négative avec l'altitude due à l'ignorance de l'effet de compensation isostatique ;

- le modèle de compensation isostatique (ou isostasie) d'Airy (1856) fait reposer la croûte en équilibre hydrostatique sur un substratum plus dense, ce qui implique une augmentation de son épaisseur sous les continents. La masse compensatrice (moindre) ainsi introduite réduit les corrélations avec l'altitude, mais rend complexe le calcul des **anomalies isostatiques** qui tiennent compte de cette compensation.

Equation fondamentale de la gravimétrie

Soit T le potentiel perturbateur : $T = W_M - V(M)$, la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence ($N = EG$) se déduit de l'altitude normale $M'M$ définie par : $\gamma_m M'M = V(M') - V(M)$ (γ_m : valeur moyenne de la pesanteur normale entre M' et M), soit en introduisant le potentiel perturbateur :

$$N = EG \cong M'M = \frac{V(M') - W_M + T}{\gamma_m} \quad , \text{ d'où : } \boxed{N = \frac{T}{\gamma_m}}$$

C'est la **formule de Bruns**.

La dérivée de T suivant la normale à l'ellipsoïde s'exprime :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial W_M}{\partial z} - \frac{\partial V(M)}{\partial z} = \frac{\partial W_M}{\partial z} - \frac{\partial V(M')}{\partial z} + \frac{\partial (V(M') - V(M))}{\partial z} \\ &= -g_M + \gamma(M') - M'M \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} \end{aligned}$$

Par définition de la surface hypsométrique, on a : $V(M') = W_M$ et donc : $\gamma_m M'M = W_M - V(M)$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \frac{\partial T}{\partial z} &= -g_M + \gamma(M') + \frac{W_M - V(M)}{\gamma_m} \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} \\ &= -\Delta g + \frac{T}{\gamma_m} \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} \end{aligned}$$

En faisant l'approximation sphérique : $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial r}$, en exprimant :

$$\gamma_m = \gamma(E) \left(1 - \frac{2z}{r} \right), \text{ soit : } \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} = -\frac{2\gamma}{r}, \text{ et en assimilant } \gamma_m \text{ à } \gamma, \text{ on}$$

obtient finalement l'**équation fondamentale de la gravimétrie** :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial r} + 2 \frac{T}{r} - \Delta g = 0}$$

Modélisation des anomalies à l'air libre

Le potentiel perturbateur $T = W_M - V(M)$ s'écrit par différence des fonctions harmoniques sphériques :

$$T = GM \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_e^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\sin \varphi) (C_{n,m}^* \cos m\lambda + S_{n,m}^* \sin m\lambda)$$

où les coefficients $C_{n,m}^*, S_{n,m}^*$ représentent les différences entre les coefficients du potentiel réel et ceux correspondants du potentiel de l'ellipsoïde de référence :

pour les zonaux pairs :

$$\begin{bmatrix} C_{n,m}^* \\ S_{n,m}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{bmatrix}_W - \begin{bmatrix} (-1)^{n/2} \frac{3}{2} e^n \frac{2-n+5nJ_2'}{(n+1)(n+3)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour les zonaux impairs et tesséraux :

$$\begin{bmatrix} C_{n,m}^* \\ S_{n,m}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{bmatrix}_W$$

Les anomalies à l'air libre se modélisent par l'équation fondamentale de la gravimétrie en :

$$\Delta g = \frac{\partial T}{\partial r} + 2 \frac{T}{r} = \gamma \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\sin \varphi) (C_{n,m}^* \cos m\lambda + S_{n,m}^* \sin m\lambda)$$

avec : $\gamma = \frac{GM}{r^2}$

Cette équation est appliquée en restitution du potentiel aux valeurs moyennes Δg sur des quadrilatères curvilignes $(\Delta\varphi, \Delta\lambda)$ dans lesquels on définit les $\langle P_{l,m}(\sin \varphi) \cos m\lambda \rangle$ et $\langle P_{l,m}(\sin \varphi) \sin m\lambda \rangle$ moyens.

Traitement des mesures altimétriques

Les radars altimétriques fournissent des lots considérables de mesures de distance entre le satellite et la surface océanique instantanée. Elles peuvent être utilisées soit directement après correction des différents écarts entre la surface et le géoïde (marées, effet baromètre-inverse, ...), soit par l'intermédiaire d'une surface océanique moyenne.

L'équation altimétrique de hauteur de l'orbite au-dessus de l'ellipsoïde s'écrit :

$$h_{orb} = N + \langle h \rangle + h_{alt}$$

h_{orb} : hauteur de l'orbite au dessus de l'ellipsoïde

N : altitude du géoïde par rapport à l'ellipsoïde

$\langle h \rangle$: écart résiduel entre la surface océanique et le géoïde

h_{alt} : mesure altimétrique

L'équation de surface moyenne par rapport à un ellipsoïde se réduit à :

$$h_{sm} = N + \langle h \rangle$$

h_{sm} : hauteur de la surface moyenne par rapport à l'ellipsoïde

Dans les deux cas, la formule de Bruns qui lie la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence (N) au potentiel perturbateur (T) peut alors être directement utilisée pour restituer le potentiel terrestre :

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{GM}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_e^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\sin \varphi) (C_{n,m}^* \cos m\lambda + S_{n,m}^* \sin m\lambda)$$

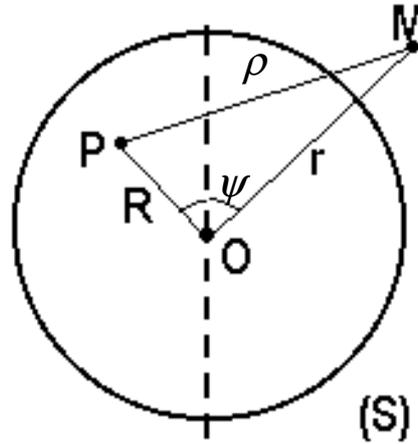
Relation entre hauteur de géoïde et anomalie de gravité

La formulation a été donnée par Stokes en 1849 en approximant la Terre à une sphère de rayon R . Elle utilise la propriété d'orthogonalité des fonctions harmoniques sphériques.

Le potentiel perturbateur T en un point M à l'extérieur à la sphère (S) de rayon R et les anomalies de gravité Δg au point courant P de la sphère terrestre s'expriment en forme harmonique :

$$T(M) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n Y_n(M)$$

$$\Delta g(P) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) Y_n(P)$$



où Y_n est la fonction harmonique :

$$Y_n = \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\sin \varphi) (C_{n,m}^* \cos m\lambda + S_{n,m}^* \sin m\lambda)$$

Soit $P_n(\cos \psi)$ le polynôme de Legendre de degré n et de pôle M . D'après la propriété d'orthogonalité, on a :

$$\iint_{(S)} Y_n(P) P_n(\cos \psi) dS = Y_n(M) \frac{4\pi R^2}{2n+1}$$

et donc :

$$\iint_{(S)} \Delta g(P) P_n(\cos \psi) dS = GM(n-1) Y_n(M) \frac{4\pi}{2n+1}$$

dS : élément de surface sur la sphère de rayon R ($=R^2 d\sigma$, $d\sigma$ élément de surface de la sphère unité).

En reportant dans $T(M)$, il vient :

$$T(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \Delta g \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi) dS$$

$S(r, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi)$ est la fonction de Stokes qui prend également la forme finie suivante :

$$S(r, \psi) = \frac{2}{\rho} + \frac{1}{r} - \frac{3\rho + R \cos\psi \left(5 + 3 \ln \left(\frac{r - R \cos\psi + \rho}{2r} \right) \right)}{r^2}$$

La **formule de Stokes** liant la hauteur du géoïde aux anomalies de gravité se déduit alors de la formule de Bruns en faisant tendre r vers R :

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{(S)} \Delta g S(R, \psi) dS$$

avec :

$$S(R, \psi) = \frac{1}{R} \left[1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right]$$

En pratique, on utilise la fonction :

$$F(\psi) = \frac{1}{2} R S(R, \psi) \sin \psi$$

qui sert dans la sommation lorsqu'on remplace l'intégrale par un découpage de la Terre en quadrilatères curvilignes ($dS = R^2 d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi d\alpha$). Compte tenu des valeurs importantes de $F(\psi)$ jusqu'aux antipodes, la sommation doit être faite sur toute la Terre.

L'inversion de la formule de Stokes a été traitée rigoureusement par Molodenski en 1948.

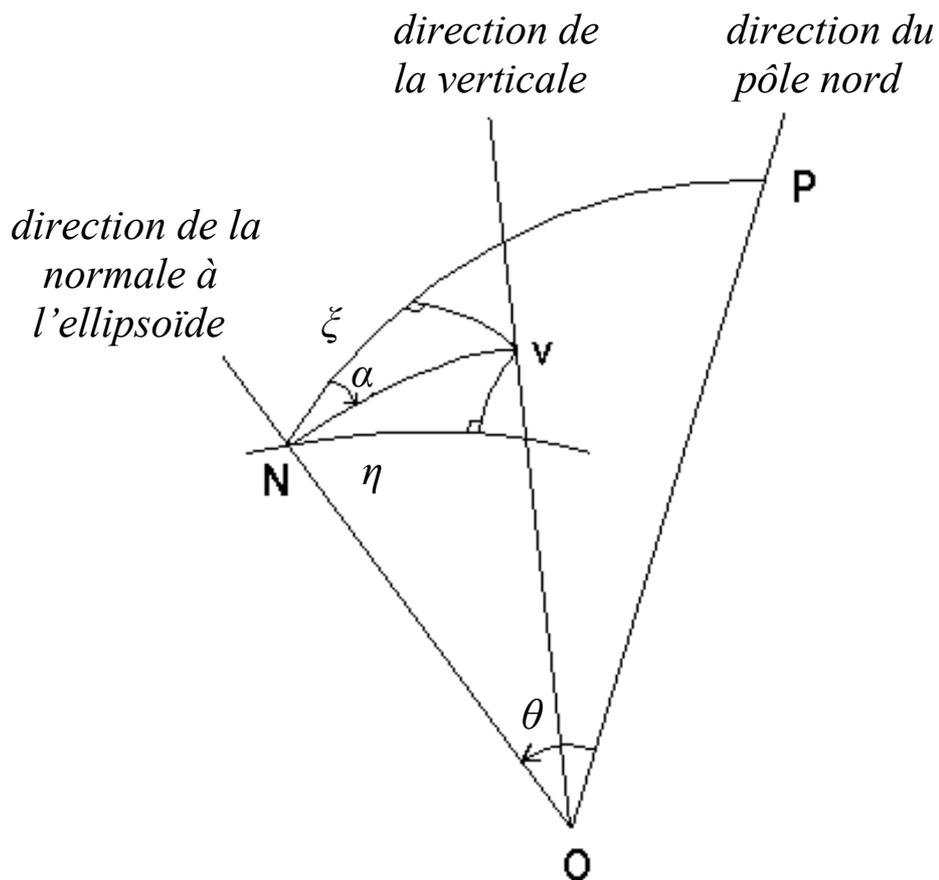
Par dérivation de la formule de Stokes on obtient les **formules de Vening-Meinesz** reliant les paramètres de déviation de la verticale aux anomalies de gravité :

déviaton de la verticale en latitude : $\xi = -\frac{1}{r\gamma} \frac{\partial T}{\partial \theta}$, θ : colatitude

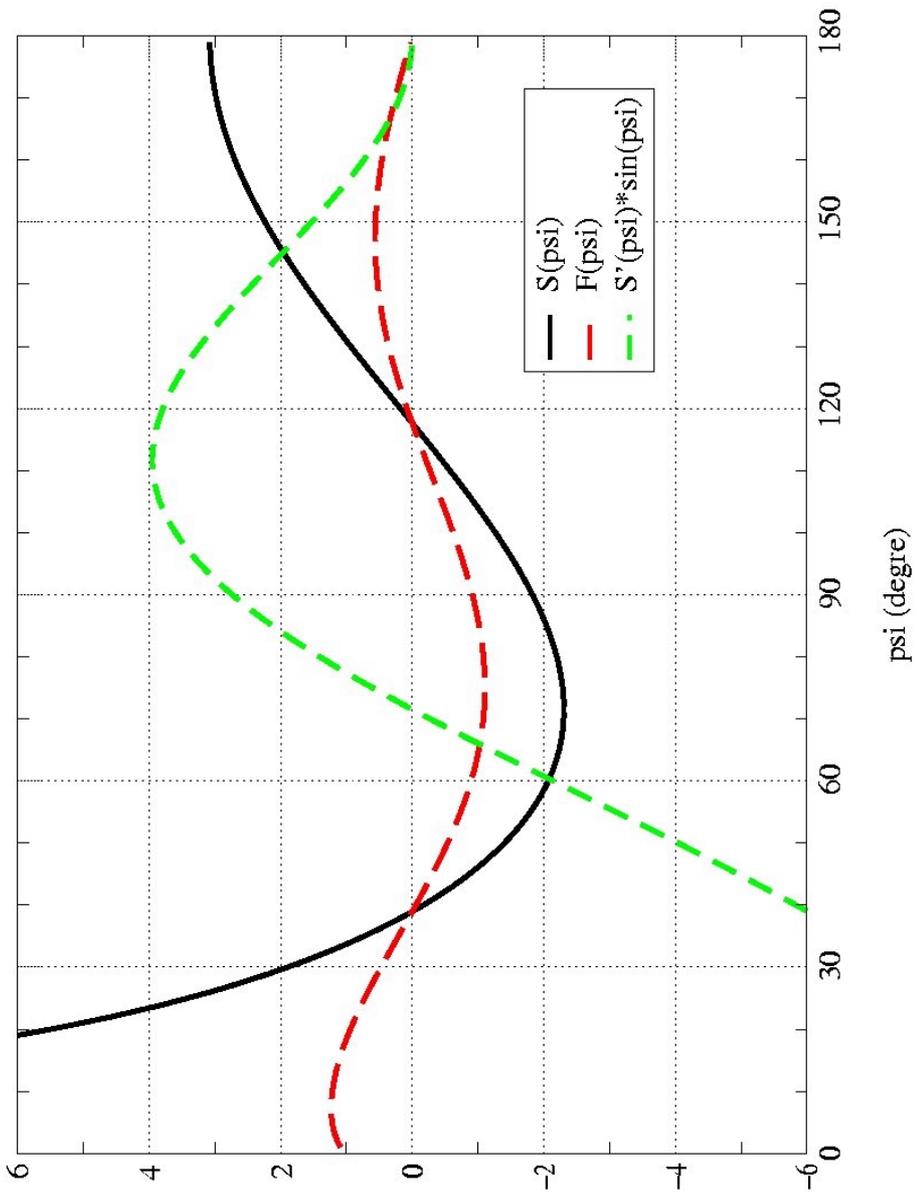
déviaton de la verticale en longitude : $\eta = -\frac{1}{r\gamma \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{(s)} \Delta g \frac{dS(R, \psi)}{d\psi} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} d\sigma$$

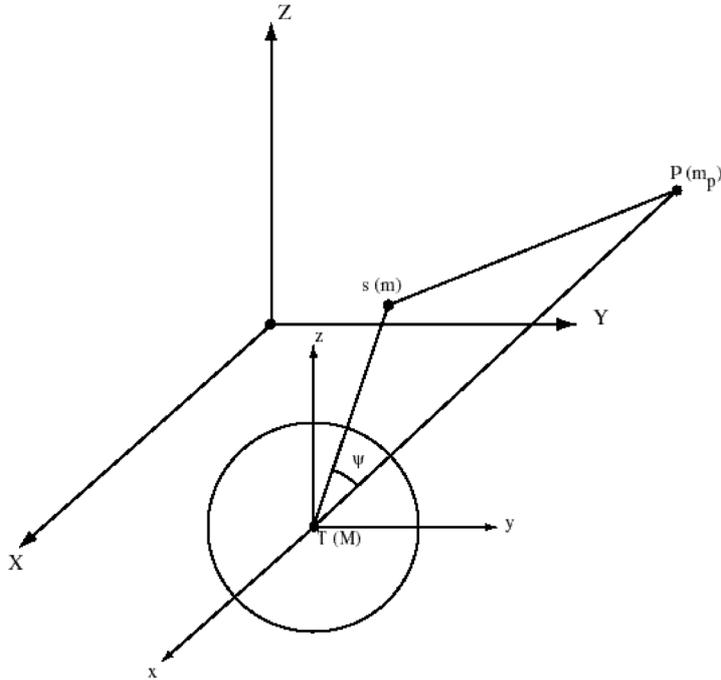
α : azimut du point courant, $d\sigma = d\psi d\alpha \sin \psi$



fonctions de Stokes et derivee



ATTRACTION GRAVITATIONNELLE DE 3^{ÈME} CORPS (résumé)



Dans un repère inertiel :

$$m \frac{d^2 X_S}{dt^2} = -Gm \int_M \frac{X_S - X_T}{r_{ST}^3} dM - Gm \int_{M_p} \frac{X_S - X_P}{r_{SP}^3} dm_p$$

Dans un repère géocentrique : $x = X_S - X_T, x_p = X_P - X_T$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \underbrace{-G \left(1 + \frac{m}{M}\right) \int_M \frac{x}{r^3} dM}_{\text{corps central}} - \underbrace{G \int_{m_p} \frac{x - x_p}{r_{sp}^3} dm_p}_{\text{3ème corps}} - \underbrace{\frac{G}{M} \iint_{M, m_p} \frac{x_p}{r_p^3} dM dm_p}_{\text{couplage}}$$

soit en approximant le 3^{ème} corps à une masse ponctuelle :

$$\text{accélération due au 3^{ème} corps : } \frac{d^2 x}{dt^2} = -Gm_p \left[\frac{x - x_p}{r_{sp}^3} + \frac{x_p}{r_p^3} \right] + \frac{m_p}{M} \frac{\partial U_2}{\partial x_p}$$

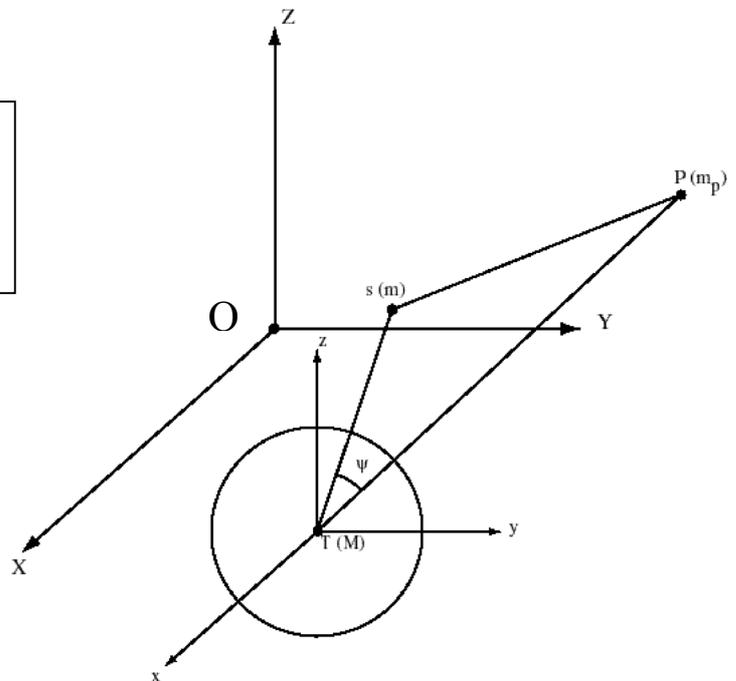
$$\text{dérivant du potentiel perturbateur : } U_p = Gm_p \left[\frac{1}{r_{sp}} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_p}{r_p^3} \right] + \frac{m_p}{M} U_2$$

$$\text{avec : } U_2 = \frac{GM}{a_e} \left(\frac{a_e}{r_p} \right)^3 C_{20} P_{20}(\sin \varphi_p), \quad \text{potentiel terrestre de degré 2.}$$

ATTRACTION GRAVITATIONNELLE DE 3^{ÈME} CORPS

CALCUL DES ACCELERATIONS PERTURBATRICES DUES A LA LUNE ET AU SOLEIL

Considérons l'attraction gravitationnelle du satellite s par deux corps T et P non ponctuels.



Le mouvement de s dans le repère inertiel (O,X,Y,Z) s'écrit d'après la loi de Newton :

$$m \frac{d^2 X_S}{dt^2} = -Gm \int_M \frac{X_S - X_T}{r_{sT}^3} dM - Gm \int_{m_p} \frac{X_S - X_P}{r_{sP}^3} dm_p$$

Effectuons le changement du repère inertiel (O,X,Y,Z) au repère non inertiel (T,x,y,z)

tel que : $x = X_S - X_T, x_p = X_P - X_T$

La relation précédente devient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 X_T}{dt^2} = \underbrace{-Gm \int_M \frac{x}{r^3} dM}_{\text{corps central}} - \underbrace{Gm \int_{m_p} \frac{x - x_p}{r_{sp}^3} dm_p}_{\text{3ème corps}}$$

Il intervient un terme d'accélération d'entraînement du repère non inertiel qui s'exprime, vis à vis des 2 corps s et P, par l'équation du mouvement:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 X_T}{dt^2} &= -Gm \int_M \frac{X_T - X_S}{r_{Ts}^3} dM - G \iint_{M, m_p} \frac{X_T - X_p}{r_{TP}^3} dM dm_p \\ &= -Gm \int_M \frac{x}{r^3} dM + G \iint_{M, m_p} \frac{x_p}{r_p^3} dM dm_p \end{aligned}$$

D'où, par insertion dans l'équation du mouvement du satellite :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \underbrace{-G \left(1 + \frac{m}{M}\right) \int_M \frac{x}{r^3} dM}_{\text{corps central}} - \underbrace{G \int_{m_p} \frac{x - x_p}{r_{sp}^3} dm_p}_{\text{3ème corps}} - \underbrace{\frac{G}{M} \iint_{M, m_p} \frac{x_p}{r_p^3} dM dm_p}_{\text{couplage}}$$

En première approximation, considérons les corps T et P comme ponctuels ; il vient :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -G(M + m) \frac{x}{r^3} - Gm_p \left[\frac{x - x_p}{r_{sp}^3} + \frac{x_p}{r_p^3} \right]$$

Le second terme du membre de droite représente l'accélération du satellite s perturbée par le corps ponctuel P. Elle dérive du potentiel :

$$U_p = Gm_p \left[\frac{1}{r_{sp}} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_p}{r_p^3} \right]$$

Tenons compte, en deuxième approximation, de l'aplatissement de la Terre T par l'introduction du coefficient zonal $C_{2,0}$. L'équation du mouvement de s s'écrit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -G \left(1 + \frac{m}{M}\right) \int_M \frac{x}{r^3} dM - Gm_p \frac{x - x_p}{r_{sp}^3} - \frac{Gm_p}{M} \int_M \frac{x_p}{r_p^3} dM$$

Le dernier terme correspond à l'attraction gravitationnelle du point-masse Lune par la Terre. On peut le considérer comme dérivant du potentiel terrestre, au point P, qui se décompose au deuxième ordre en :

$$G \int_M \frac{dM}{r_p} = \frac{GM}{r_p} \left(1 + C_{2,0} \left(\frac{a_e}{r_p} \right)^2 P_{2,0}(\sin \varphi_p) \right) = \frac{GM}{r_p} + U_2$$

L'accélération perturbatrice du satellite s devient donc:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -Gm_p \left[\frac{x - x_p}{r_{sp}^3} + \frac{x_p}{r_p^3} \right] + \frac{m_p}{M} \frac{\partial U_2}{\partial x_p}$$

avec : $U_2 = \frac{GM}{a_e} \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 C_{20} P_{20}(\sin \varphi_p)$, potentiel terrestre de degré 2, qui produit

l'accélération :

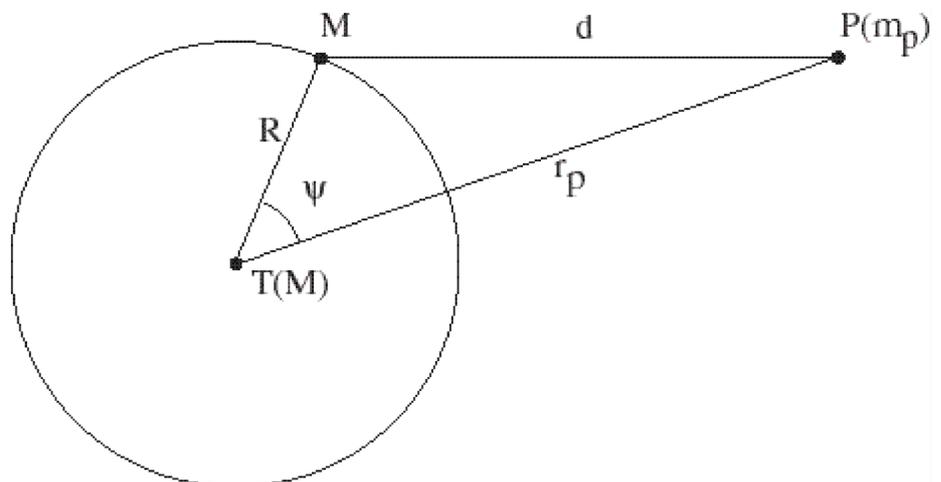
$$\frac{m_p}{M} \begin{bmatrix} \partial U_2 / \partial x_p \\ \partial U_2 / \partial y_p \\ \partial U_2 / \partial z_p \end{bmatrix} = -\frac{3}{2} \frac{Gm_p}{r_p^5} C_{2,0} a_e^2 \left\{ \left(5 \sin^2 \varphi_p - 1 \right) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_p \end{bmatrix} \right\}$$

Cette accélération perturbatrice du deuxième ordre, due à l'aplatissement terrestre, en Gm_p (Lune) \times $C_{2,0}$ (Terre), induite par le référentiel géocentrique non inertiel, ne dépend que de la position de la Lune. Son amplitude est de l'ordre de 10^{-11} m/s² à la période principale du mois lunaire.

Accélérations de marée terrestre

En repère géocentrique, le potentiel d'un corps perturbateur P (représentant la Lune ou le Soleil) s'exprime en M à la surface de la Terre par :

$$U = Gm_p \left(\frac{1}{d} - \frac{\bar{R} \cdot \bar{r}_p}{r_p^3} \right)$$



L'inverse de la distance (d^{-1}) se développe en séries de polynômes de Legendre telle que :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_p} \left(1 + \left(\frac{R}{r_p} \right)^2 - \frac{2R}{r_p} \cos \psi \right)^{-1/2} = \frac{1}{r_p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_p} \right)^n P_n(\cos \psi)$$

Si bien que le potentiel perturbateur tronqué au degré 3 se réduit à :

$$U = \frac{Gm_p}{r_p} \left(1 + \left(\frac{R}{r_p} \right)^2 P_{20}(\cos \psi) + \left(\frac{R}{r_p} \right)^3 P_{30}(\cos \psi) \right)$$

$$= U_0 + U_2 + U_3$$

$U_0 = \frac{Gm_p}{r_p}$ cause l'attraction centrale, U_1 n'existe pas, U_2 et U_3 produisent les

déformations de marées terrestres (respectivement de l'ordre de 30 cm et 3 mm).

Conformément à la théorie de Love et au principe de Dirichlet, ces déformations génèrent un potentiel perturbateur en un point extérieur à la Terre tel que :

$$\Delta U_\ell = k_\ell \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} U_\ell \quad \ell = 2, 3$$

Explicitant ce potentiel aux degrés 2 et 3 en un point extérieur à la distance r , il vient :

$$\Delta U_2 = k_2 \frac{Gm_p}{r_p^3} \frac{R^5}{r^3} \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}$$

$$\Delta U_3 = k_3 \frac{Gm_p}{r_p^4} \frac{R^7}{r^4} \frac{5 \cos^2 \psi - 3}{2}$$

avec : $\cos \psi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_p}{r r_p}$

Les accélérations perturbatrices s'en déduisent directement en appliquant l'opérateur gradient :

$$\overline{\text{grad}} \Delta U_2 = k_2 \frac{Gm_p}{r_p^3} \frac{R^5}{r^4} \left[\frac{3 - 15 \cos^2 \psi}{2} \frac{\vec{r}}{r} + 3 \cos \psi \frac{\vec{r}_p}{r_p} \right]$$

$$\overline{\text{grad}} \Delta U_3 = k_3 \frac{Gm_p}{r_p^4} \frac{R^7}{r^5} \left[\cos \psi \frac{15 - 35 \cos^2 \psi}{2} \frac{\bar{r}}{r} + \frac{15 \cos \psi - 3 \bar{r}_p}{2} \frac{\bar{r}_p}{r_p} \right]$$

De manière générale, le potentiel de marée terrestre peut s'exprimer en coordonnées sphériques en appliquant :

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi_p + \cos \varphi \cos \varphi_p \cos(\lambda - \lambda_p)$$

$$\text{et } P_{\ell o}(\cos \psi) = \sum_{m=0}^{\ell} (2 - \delta_{lo}) \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_{\ell m}(\sin \varphi) P_{\ell m}(\sin \varphi_p) \cos(m(\lambda - \lambda_p))$$

Au degré ℓ , on a :

$$\Delta U_p = \frac{Gm_p}{r_p} k_{\ell} \left(\frac{R}{r_p} \right)^{\ell} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} P_{\ell o}(\cos \psi)$$

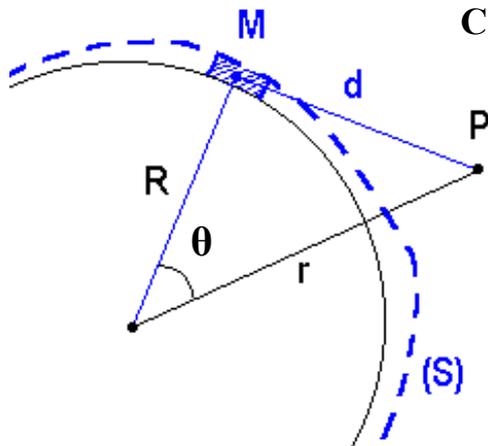
et par exemple au degré 2 :

$$\begin{aligned} \Delta U_2 = k_2 \frac{Gm_p}{r_p^3} \frac{R^5}{r^3} & \left[P_{20}(\sin \varphi) P_{20}(\sin \varphi_p) \right. \\ & + \frac{1}{3} P_{21}(\sin \varphi) P_{21}(\sin \varphi_p) \cos(\lambda - \lambda_p) \\ & \left. + \frac{1}{12} P_{22}(\sin \varphi) P_{22}(\sin \varphi_p) \cos 2(\lambda - \lambda_p) \right] \end{aligned}$$

Nombres de Love de volume / P Gegout 1996

n	h	l	k
1	0.299987D+01	0.299983D+01	0.200000D+01
2	0.603735D+00	0.839561D-01	0.298234D+00
3	0.288280D+00	0.148469D-01	0.921416D-01
4	0.175208D+00	0.102231D-01	0.414897D-01
5	0.129112D+00	0.846285D-02	0.243783D-01
6	0.107099D+00	0.677595D-02	0.168097D-01
7	0.948352D-01	0.539104D-02	0.127119D-01
8	0.867857D-01	0.431305D-02	0.101318D-01
9	0.809622D-01	0.349258D-02	0.836025D-02
10	0.762185D-01	0.286504D-02	0.704798D-02
11	0.724731D-01	0.237695D-02	0.606358D-02
12	0.692472D-01	0.199165D-02	0.528719D-02
13	0.665832D-01	0.167874D-02	0.467332D-02
14	0.641258D-01	0.142463D-02	0.416391D-02
15	0.619920D-01	0.121798D-02	0.374320D-02
16	0.599359D-01	0.104814D-02	0.338195D-02
17	0.581633D-01	0.902538D-03	0.307963D-02
18	0.564830D-01	0.781202D-03	0.281681D-02
19	0.550123D-01	0.675274D-03	0.259240D-02
20	0.534638D-01	0.590768D-03	0.238794D-02
21	0.520855D-01	0.515896D-03	0.221083D-02
22	0.507286D-01	0.453263D-03	0.205132D-02
23	0.494495D-01	0.399067D-03	0.190916D-02
24	0.482621D-01	0.351270D-03	0.178261D-02
25	0.470795D-01	0.311322D-03	0.166675D-02
26	0.459808D-01	0.275647D-03	0.156290D-02
27	0.449128D-01	0.244952D-03	0.146801D-02
28	0.438874D-01	0.218124D-03	0.138145D-02
29	0.429044D-01	0.194584D-03	0.130233D-02
30	0.419498D-01	0.174151D-03	0.122947D-02
31	0.410310D-01	0.156146D-03	0.116246D-02
32	0.401451D-01	0.140297D-03	0.110066D-02
33	0.392801D-01	0.126578D-03	0.104327D-02
34	0.384479D-01	0.114380D-03	0.990186D-03
35	0.376427D-01	0.103632D-03	0.940885D-03
36	0.368717D-01	0.939365D-04	0.895211D-03
37	0.361252D-01	0.853498D-04	0.852641D-03
38	0.354027D-01	0.777273D-04	0.812914D-03
39	0.347007D-01	0.710016D-04	0.775732D-03
40	0.340213D-01	0.650109D-04	0.740944D-03
41	0.333678D-01	0.595708D-04	0.708437D-03
42	0.327315D-01	0.547817D-04	0.677871D-03
43	0.321166D-01	0.504640D-04	0.649188D-03
44	0.315211D-01	0.465907D-04	0.622215D-03
45	0.309441D-01	0.431111D-04	0.596823D-03
46	0.303846D-01	0.399911D-04	0.572885D-03
47	0.298428D-01	0.371703D-04	0.550312D-03
48	0.293172D-01	0.346336D-04	0.528990D-03
49	0.288069D-01	0.323561D-04	0.508824D-03
50	0.283137D-01	0.302648D-04	0.489775D-03

Le potentiel de simple couche



Charge de surface (densité surfacique) : $q(\varphi', \lambda')$

Potentiel en P :

$$U_p = G \iiint_V \frac{dm}{d} = \iint_S \frac{q}{d} ds$$

avec : $ds = R^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi$

On développe :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} &= \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\sin \varphi) P_{lm}(\sin \varphi') (\cos m(\lambda - \lambda')) \end{aligned}$$

et $q(\varphi', \lambda') = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi') (q_{lm}^c \cos m\lambda' + q_{lm}^s \sin m\lambda')$

Dû à l'orthogonalité des fonctions de Legendre :

$$\iint_S P_{lm}(\sin \varphi') P_{l'm'}(\sin \varphi') e^{im\lambda'} e^{im'\lambda'} ds = \frac{4\pi}{(2 - \delta_{0m})(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

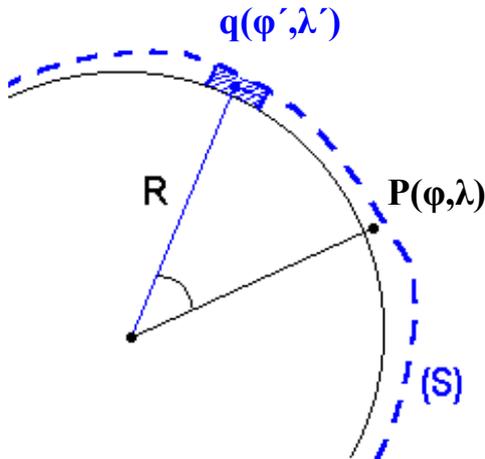
on a :

$$\iint_S \frac{q}{d} ds = \frac{4\pi R^2}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (q_{lm}^c \cos m\lambda + q_{lm}^s \sin m\lambda)$$

d'où :

$$U_p = 4\pi GR \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (q_{lm}^c \cos m\lambda + q_{lm}^s \sin m\lambda)$$

Potentiel et déformation de charge



Charge q de :

marée océanique : $q = \xi_0 \rho_w$

pression atmosphérique : $q = P_a / g$

rebond post-glaciaire : $q = \xi_e \rho_e$

Le potentiel de simple couche généré par cette charge s'exprime en P à la surface (S) :

$$U_p(\varphi, \lambda) = 4\pi GR \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (q_{lm}^c \cos m\lambda + q_{lm}^s \sin m\lambda) = 4\pi GR \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q_l(\varphi, \lambda)}{2l+1}$$

soit en posant : $g = \frac{GM}{R^2}$ et $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e$, d'où $4\pi gR = \frac{3g}{\rho_e}$ avec $\rho_e = 5520 \text{ kg m}^{-3}$

$$U_p(\varphi, \lambda) = \frac{3g}{\rho_e} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l q_{lm}(\varphi, \lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l$$

D'après la première hypothèse de Love, le déplacement de la croûte visco-élastique est proportionnel au potentiel de charge :

$$\xi(\varphi, \lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} h'_l \frac{U_l}{g} = \frac{3}{\rho_e} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h'_l}{2l+1} q_l(\varphi, \lambda)$$

D'après la seconde hypothèse de Love, cette déformation génère un potentiel additionnel de déformation de charge:

$$\Delta U_p(\varphi, \lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} k'_l U_l = \frac{3g}{\rho_e} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{k'_l}{2l+1} q_l(\varphi, \lambda)$$

Le potentiel total de charge : $U_p + \Delta U_p$ peut s'écrire sous une forme similaire au potentiel de volume dont les coefficients de Stokes s'expriment alors :

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{4\pi R^2}{M} \frac{1+k'_l}{2l+1} \begin{Bmatrix} q_{lm}^c \\ q_{lm}^s \end{Bmatrix} = \frac{3}{R\rho_e} \frac{1+k'_l}{2l+1} \begin{Bmatrix} q_{lm}^c \\ q_{lm}^s \end{Bmatrix}$$

Nombres de Love de surcharge compressible / P Gegout 1996

n	h	l	k
1	-0.288900	0.104500	0.000000
2	-0.996115	0.022438	-0.314166
3	-1.050789	0.069929	-0.198030
4	-1.052852	0.058648	-0.134020
5	-1.085916	0.045927	-0.104461
6	-1.144159	0.038073	-0.089905
7	-1.213927	0.033367	-0.081617
8	-1.287193	0.030291	-0.076149
9	-1.360247	0.028063	-0.072116
10	-1.431636	0.026315	-0.068923
11	-1.500925	0.024874	-0.066283
12	-1.568084	0.023649	-0.064039
13	-1.633227	0.022584	-0.062095
14	-1.696499	0.021640	-0.060385
15	-1.758044	0.020790	-0.058863
16	-1.818000	0.020012	-0.057494
17	-1.876492	0.019291	-0.056251
18	-1.933640	0.018613	-0.055116
19	-1.989563	0.017969	-0.054073
20	-2.044374	0.017352	-0.053109
21	-2.098187	0.016757	-0.052216
22	-2.151115	0.016180	-0.051385
23	-2.203271	0.015618	-0.050611
24	-2.254768	0.015068	-0.049888
25	-2.305719	0.014530	-0.049214
26	-2.356233	0.014003	-0.048585
27	-2.406423	0.013485	-0.047998
28	-2.456397	0.012976	-0.047451
29	-2.506267	0.012475	-0.046942
30	-2.556139	0.011983	-0.046469
31	-2.606122	0.011500	-0.046032
32	-2.656325	0.011024	-0.045629
33	-2.706854	0.010555	-0.045259
34	-2.757818	0.010094	-0.044921
35	-2.809326	0.009641	-0.044615
36	-2.861489	0.009194	-0.044340
37	-2.914419	0.008753	-0.044096
38	-2.968231	0.008319	-0.043881
39	-3.023044	0.007891	-0.043697
40	-3.078981	0.007468	-0.043543
41	-3.136169	0.007050	-0.043418
42	-3.194743	0.006637	-0.043323
43	-3.254844	0.006227	-0.043259
44	-3.316622	0.005821	-0.043224
45	-3.380235	0.005418	-0.043221
46	-3.445856	0.005016	-0.043249
47	-3.513668	0.004616	-0.043310
48	-3.583870	0.004217	-0.043403
49	-3.656678	0.003817	-0.043531
50	-3.732330	0.003416	-0.043694

Accélérations de marées océaniques

La hauteur globale des marées océaniques s'exprime classiquement par une sommation sur n ondes :

$$\xi(\varphi, \lambda, t) = \sum_n Z_n(\varphi, \lambda) \cos(\theta_n(t) - \psi_n(\varphi, \lambda))$$

Z_n est l'amplitude de l'onde n ,

ψ_n est la phase exprimée à l'instant de passage du corps perturbateur (lune ou soleil) au méridien de Greenwich,

θ_n est l'argument de Doodson qui, d'après la théorie de Doodson, s'exprime en combinaison linéaire de 6 variables :

$$\theta_n(t) = n_1\tau + (n_2 - 5)s + (n_3 - 5)h + (n_4 - 5)p + (n_5 - 5)N' + (n_6 - 5)p_s$$

Ces 6 variables de fréquences décroissantes représentent les arguments fondamentaux liés aux mouvements de la Lune et du Soleil :

- τ : jour lunaire moyen (1.03505 j)
- s : mois tropique moyen (27.32158 j)
- h : année tropique moyenne (365.2422 j)
- p : périégée lunaire moyen (8.8473 ans)
- N' : noeud lunaire moyen (18.6129 ans)
- p_s : périhélie (20940.28 ans)

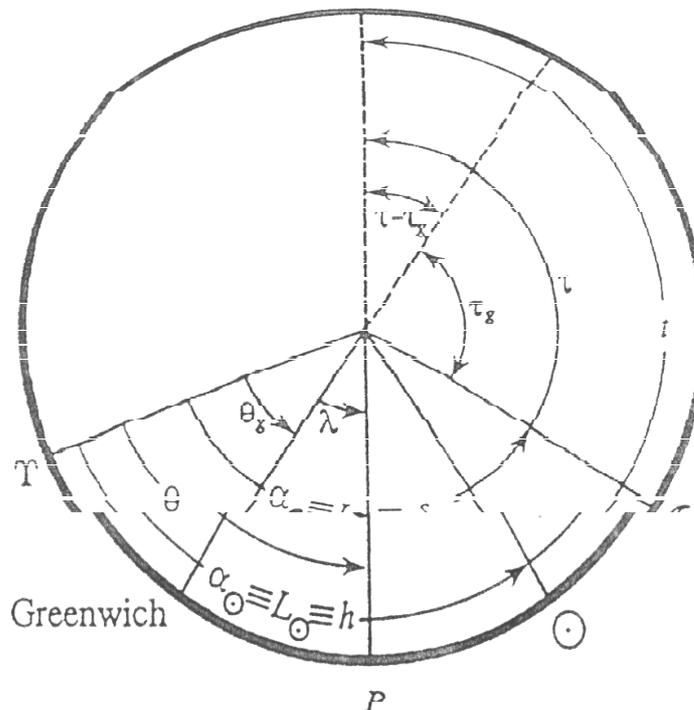
n_1 (= 0, 1, 2, 3...) définit l'espèce (longue période, diurne, semi-diurne, ter-diurne...), n_2 le groupe (en général : $1 \leq n_2 \leq 9$) et n_3 le constituant ($1 \leq n_3 \leq 9$). Par exemple, l'onde lunaire principale dénotée M_2 en symbole de Darwin s'exprime par le numéro de Doodson : $n_1 n_2 n_3 \cdot n_4 n_5 n_6 = 255.555$ (M_2 n'est fonction que du jour lunaire moyen : τ).

Angles fondamentaux de Doodson

angle	fréquence (°/h)	période (j/an)	
θ	15.0410686	0.9972696 j	jour sidéral
t	15.	1. j	jour solaire moyen
Arguments de Doodson			
τ	14.4920521	1.035050 j	jour lunaire moyen
s	0.5490165	27.321582 j	mois tropique moyen
h	0.0410686	365.242199 j	année tropique moyenne
p	0.0046418	8.847309 ans	rév. du périgée lunaire moyen
N'	0.0022064	18.612904 ans	rév. du nœud lunaire moyen
p_s	0.0000020	20940.2766 ans	révolution du périhélie

Relation entre les temps solaire et lunaire moyens :

$$s + \tau = h + t = \theta + \pi$$



Nom de Darwin	Nombre de Doodson	Argument de Doodson	Coef. harm. α_i	Fréquence (°/h)	Fréquence (rad/s)	Période (jours)	Origine
M_0	055.555	-	0,50458	0		-	L
S_0	055.555	-	0,23411	0		-	S
S_a	056.554	$h - p_1$	0,01176	0,0410667	0,0000001991	365,2594	S
S_{sa}	057.555	$2h$	0,07287	0,0821373	0,0000003982	182,6211	S
S_{ia}	058.554	$3h - p_1$	0,00427	0,1232040	0,0000005973	121,7493	S
M_{sm}	063.655	$s - 2h + p$	0,01578	0,4715211	0,0000022860	31,8119	L
M_m	065.455	$s - p$	0,08254	0,5443747	0,0000026392	27,5546	L
M_{sf}	073.555	$2s - 2h$	0,01370	1,0158958	0,0000049252	14,7653	L
M_f	075.555	$2s$	0,15642	1,0980331	0,0000053234	13,6608	L
M_{stm}	083.655	$3s - 2h + p$	0,00569	1,5695548	0,0000076094	9,5569	L
M_{tm}	085.455	$3s - p$	0,02995	1,6424078	0,0000079626	9,1329	L
M_{sqm}	093.555	$4s - 2h$	0,00478	2,1139288	0,0000102486	7,0958	L
$2Q_1$	125.755	$\tau - 3s + 2p$	0,00955	12,8442862	0,0000622709	1,1678	S
σ_1	127.555	$\tau - 3s + 2h$	0,01153	12,9271398	0,0000626725	1,1603	L
Q_1	135.655	$\tau - 2s + p$	0,07216	13,3986609	0,0000649585	1,1195	S
ρ_1	137.455	$\tau - 2s + 2h + p$	0,01371	13,4715145	0,0000653117	1,1135	L
O_1	145.555	$\tau - s$	0,37689	13,9430356	0,0000675977	1,0758	L
τ_1	147.555	$\tau - s + 2h$	0,00491	14,0251729	0,0000679960	1,0695	
M_{11}	155.655	$\tau + p$	0,02964	14,4966939	0,0000702820	1,0347	L
M_{12}	155.655	$\tau + p$	0,01040	14,4874103	0,0000702369	1,0295	L
χ_1	157.455	$\tau + 2h - p$	0,00566	14,5695476	0,0000706352	1,0295	L
π_1	162.556	$\tau + s - 3h + p_1$	0,01029	14,9178647	0,0000723238	1,0055	S
P_1	163.555	$\tau + s - 2h$	0,17554	14,9589314	0,0000725229	1,0027	S
K_1^L	165.555	$\tau + s$	0,36233	15,0410686	0,0000729212	0,9973	L
K_1^S	165.555	$\tau + s$	0,16817	15,0410686	0,0000729212	0,9973	S
ψ_1	166.554	$\tau + s + h + p_1$	0,00423	15,0821353	0,0000731203	0,9946	S
ϕ_1	167.555	$\tau + s + 2h$	0,00756	15,1232059	0,0000733194	0,9919	S
θ_1	173.655	$\tau + 2s - 2h + p$	0,00566	15,5125897	0,0000752072	0,9670	L
J_1	175.455	$\tau + 2s - p$	0,02954	15,5854433	0,0000755604	0,9624	L
SO_1	183.455	$\tau + 3s - 2h$	0,00492	16,0569644	0,0000778464	0,9342	L
OO_1	185.655	$\tau + 3s + N'$	0,01623	16,1391017	0,0000782446	0,9294	L
v_1	195.455	$\tau + 4s - p$	0,00311	16,6834764	0,0000808838	0,8991	L
ϵ_2	227.655	$2\tau - 2s + 2p + N'$	0,00671	27,3416964	0,0001325563	0,5486	L
$2N_2$	235.755	$2\tau - 2s + 2p$	0,02301	27,8953548	0,0001352405	0,5363	L
μ_2	237.555	$2\tau - 4s + 4h$	0,02777	27,9682084	0,0001355937	0,5363	L
N_2	245.655	$2\tau - s + p$	0,17387	28,4397295	0,0001378797	0,5274	L
v_2	247.455	$2\tau - s + 2h - p$	0,03303	28,512583	0,0001382329	0,5261	L
M_2	255.555	2τ	0,90812	28,9841042	0,0001405189	0,5175	L
λ_2	263.655	$2\tau - s - 2h + p$	0,00670	29,4556253	0,0001428049	0,5092	L
L_2	265.455	$2\tau + s - p$	0,02567	29,5284700	0,0001431580	0,5078	L
T_2	272.556	$2\tau + 2s - 3h + p_1$	0,02479	29,5589333	0,0001433058	0,5075	S
S_2	273.555	$2\tau + 2s - 2h$	0,42286	30,0000000	0,0001454441	0,5000	S
R_2	274.554	$2\tau + 2s - h - p_1$	0,00354	30,0410667	0,0001456432	0,4993	S
K_2^S	275.555	$2\tau + 2s$	0,03648	30,0821373	0,0001458423	0,4986	S
K_2^L	275.555	$2\tau + 2s$	0,07858	30,0821373	0,0001458423	0,4986	L

Principales composantes extraites du développement de Doodson (source : thèse F. Lefèvre)

L'amplitude (Z_n) et la phase (ψ_n) des différentes ondes de marée représentées par les cartes cotidales peuvent se développer en fonctions harmoniques sphériques de $Z_n \cos \psi_n$ et $Z_n \sin \psi_n$:

$$\begin{cases} Z_n \cos \psi_n = \sum_l \sum_m (a_{n,lm} \cos m\lambda + b_{n,lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi) \\ Z_n \sin \psi_n = \sum_l \sum_m (c_{n,lm} \cos m\lambda + d_{n,lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi) \end{cases}$$

Ainsi, la hauteur de marée s'explique :

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, \lambda, t) &= \sum_n (Z_n \cos \psi_n \cos \theta_n + Z_n \sin \psi_n \sin \theta_n) \\ &= \sum_n \sum_l \sum_m \left[\begin{aligned} &\frac{a_{n,lm} - d_{n,lm}}{2} (\cos m\lambda \cos \theta_n - \sin m\lambda \sin \theta_n) \\ &+ \frac{a_{n,lm} + d_{n,lm}}{2} (\cos m\lambda \cos \theta_n + \sin m\lambda \sin \theta_n) \\ &+ \frac{c_{n,lm} + b_{n,lm}}{2} (\cos m\lambda \sin \theta_n + \sin m\lambda \cos \theta_n) \\ &+ \frac{c_{n,lm} - b_{n,lm}}{2} (\cos m\lambda \sin \theta_n - \sin m\lambda \cos \theta_n) \end{aligned} \right] P_{lm}(\sin \varphi) \end{aligned}$$

En posant : $C_{n,lm}^+ = \frac{a_{n,lm} - d_{n,lm}}{2}$, $C_{n,lm}^- = \frac{a_{n,lm} + d_{n,lm}}{2}$

et $S_{n,lm}^+ = \frac{c_{n,lm} + b_{n,lm}}{2}$, $S_{n,lm}^- = \frac{c_{n,lm} - b_{n,lm}}{2}$,

la hauteur de marée s'écrit :

$$\xi(\varphi, \lambda, t) = \sum_n \sum_l \sum_m \sum_{\pm} [C_{n,lm}^{\pm} \cos(\theta_n \pm m\lambda) + S_{n,lm}^{\pm} \sin(\theta_n \pm m\lambda)] P_{lm}(\sin \varphi)$$

ou encore en introduisant amplitude et phase :

$$\begin{aligned} C_{n,lm}^{\pm} &= \hat{C}_{n,lm}^{\pm} \sin(\varepsilon_{n,lm}^{\pm} + \chi_n) \\ S_{n,lm}^{\pm} &= \hat{C}_{n,lm}^{\pm} \cos(\varepsilon_{n,lm}^{\pm} + \chi_n) \end{aligned}$$

avec χ_n représentant la convention de phase de Doodson-Warburg :

$$\chi_n = 0, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi$$

telle que l'amplitude de la marée d'équilibre (H_n) soit un coefficient positif d'un terme cosinus dans l'expression du potentiel générateur de marée:

$$\xi(\varphi, \lambda, t) = \sum_n \sum_l \sum_m \sum_{+} \hat{C}_{n,lm}^{\pm} \sin(\theta_n \pm m\lambda + \varepsilon_{n,lm}^{\pm}) P_{lm}(\sin \varphi)$$

La charge de surface créée par les marées océaniques est le produit de la hauteur d'eau déplacée par sa densité :

$$q_n(\varphi, \lambda, t) = \xi_n \cdot \rho_w \quad \text{en } kg/m^2 \quad (\rho_w \approx 1025 \text{ kg}/m^3)$$

et le potentiel de simple couche généré en un point extérieur (r, φ, λ) vaut :

$$\Delta U_m(r, \varphi, \lambda, t) = 4\pi GR \sum_n \sum_l \sum_m \sum_{+} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} q_{n,lm}^{\pm}(\varphi, \lambda, t) P_{lm}(\sin \varphi)$$

En outre, cette charge de surface entraîne une déformation de la croûte terrestre qui est prise en compte dans la théorie de Love par ajout de coefficients de charge k'_l négatifs (la déformation est négative lorsque la charge croît) et décroissants en valeur absolue ($k'_2 = -.31, k'_3 = -.20\dots$).

Le potentiel de marées océaniques s'écrit en définitive :

$$\Delta U_n(r, \varphi, \lambda, t) = 4\pi GR \sum_n \sum_l \sum_m \sum_{+} \frac{1+k'_l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} q_{n,lm}^{\pm}(\varphi, \lambda, t) \cdot P_{lm}(\sin \varphi)$$

- + représente les ondes progrades, les principales qui accompagnent le mouvement des astres perturbateurs (vers l'Ouest)
- représente les ondes rétrogrades (vers l'Est)

L'admittance

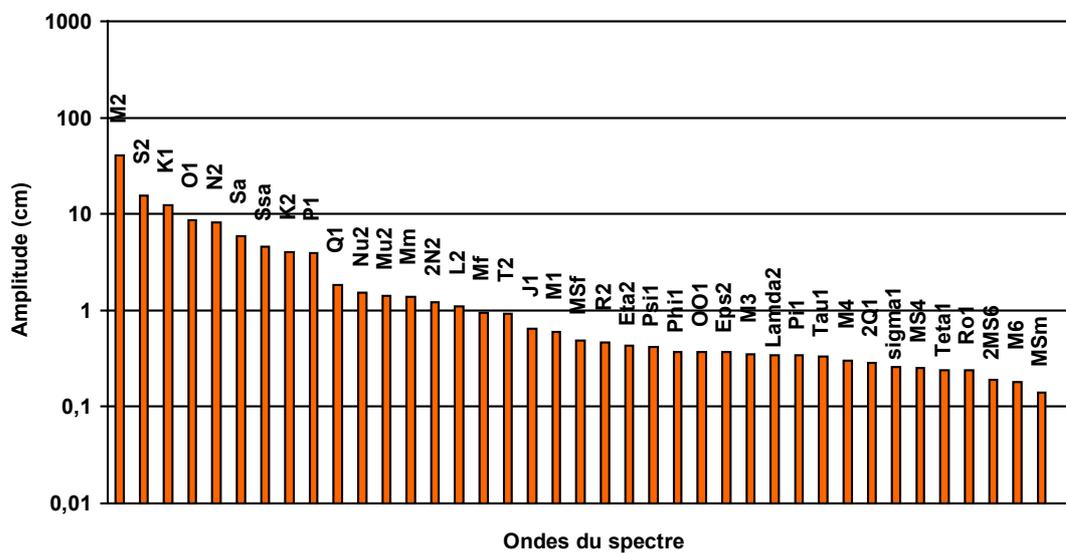
Les modèles de marées océaniques issus des équations de l'hydrodynamique ou de l'assimilation de données marégraphiques ou altimétriques ne fournissent que les ondes principales longues périodes (Ssa, Mm, Mf), diurnes (Q_1, O_1, P_1, K_1) et semi-diurnes (N_2, M_2, S_2, K_2). Elles ne représentent environ que 80 % de l'amplitude du spectre total. Pour tenir compte d'un spectre élargi, un certain nombre d'autres ondes (telles que l'amplitude de la marée d'équilibre réalisée pour une Terre couverte d'océan est supérieure à 1 mm) sont introduites par admittance.

La fonction d'admittance est définie comme une fonction de transfert entre le potentiel générateur de marée et la réponse de l'océan par nombre d'ondes:

$$G_n(\varphi, \lambda) = \frac{\xi_n(\varphi, \lambda, t)}{U_n(\varphi, \lambda, t)}$$

Il a été montré que le comportement de la fonction d'admittance est lisse en fréquence tel qu'il est possible de l'interpoler linéairement entre 2 ondes principales de fréquences voisines ($\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$) :

$$G(\dot{\theta}_n) = \frac{\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} G(\dot{\theta}_2) - \frac{\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} G(\dot{\theta}_1)$$



Décomposition harmonique du spectre de marée (pour la base de données pélagiques ST95)

Onde	Pourcentage d'importance
M_2	33,5%
S_2	12,6%
K_1	10,1%
O_1	7,0%
N_2	6,8%
K_2	3,3%
Q_1	1,5%
$2N_2$	1,0%
Total	75,9%

Pourcentage d'importance des principales ondes du spectre (source : thèse F. Lefèvre)

Si l'on exprime pour chaque onde représentée par les arguments $\theta_n, \theta_1, \theta_2$ les développements complexes de la hauteur et du potentiel générateur de marée au degré 2 :

$$\xi_n = \sum_{\ell_m} \sum_{+} [(a_{\ell_m} \cos m\lambda + b_{\ell_m} \sin m\lambda) - i(c_{\ell_m} \cos m\lambda + d_{\ell_m} \sin m\lambda)] P_{\ell_m}(\sin \varphi) e^{i(\theta_n + X_n)}$$

avec a, b, c, d vérifiant : $C^{\pm} = \frac{a \mp d}{2}$, $S^{\pm} = \frac{c \pm b}{2}$

et $U_n = gH_n Y_2^{n_1}(\varphi, \lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}_{n_1}^{n_1 \text{ pair}} e^{i\theta_n}$

avec $Y_2^{n_1}(\varphi, \lambda) = (-1)^{n_1} \left[\frac{5(2-n_1)!}{4\pi(2+n_1)!} \right]^{1/2} P_{2n_1}(\sin \varphi) e^{in_1\lambda}$

il vient en posant $\xi_n = G(\dot{\theta}_n) U_n$ et $G(\dot{\theta}_1) = \frac{\xi_1}{U_1}$, $G(\dot{\theta}_2) = \frac{\xi_2}{U_2}$:

$$\begin{aligned} \xi_n = & \frac{\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \cdot \frac{H_n}{H_2} \left\{ \cos(\theta_n - \theta_2) \sum_{\ell, m} \sum_{+} [C_{\ell m}^{\pm} \cos(\theta_2 + \chi_2 \pm m\lambda) + S_{\ell m}^{\pm} \sin(\theta_2 + \chi_2 \pm m\lambda)] \right. \\ & \left. + \sin(\theta_n - \theta_2) \sum_{\ell, m} \sum_{+} [S_{\ell m}^{\pm} \cos(\theta_2 + \chi_2 \pm m\lambda) + C_{\ell m}^{\pm} \sin(\theta_2 + \chi_2 \pm m\lambda)] \right\} \\ & + \frac{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_n}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \cdot \frac{H_n}{H_1} \left\{ \cos(\theta_n - \theta_1) \sum_{\ell, m} \sum_{+} [C_{\ell m}^{\pm} \cos(\theta_1 + \chi_1 \pm m\lambda) + S_{\ell m}^{\pm} \sin(\theta_1 + \chi_1 \pm m\lambda)] \right. \\ & \left. + \sin(\theta_n - \theta_1) \sum_{\ell, m} \sum_{+} [S_{\ell m}^{\pm} \cos(\theta_1 + \chi_1 \pm m\lambda) - C_{\ell m}^{\pm} \sin(\theta_1 + \chi_1 \pm m\lambda)] \right\} \end{aligned}$$

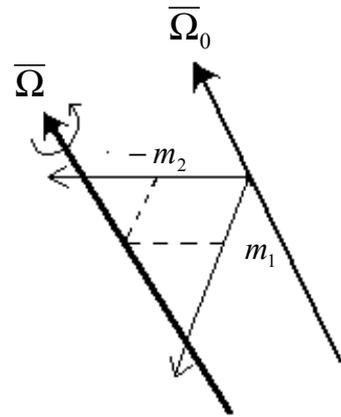
Les fonctions $\pm \frac{\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_i}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \frac{H_n}{H_i} \cos(\theta_n - \theta_i)$ et $\pm \frac{\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_i}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \frac{H_n}{H_i} \sin(\theta_n - \theta_i)$ varient peu

dans le temps et peuvent donc s'interpoler linéairement.

La marée polaire

L'accélération centrifuge à la surface de la Terre en rotation (Ω) s'exprime au point de coordonnées (X, Y, Z) définies dans le repère terrestre, par le vecteur $(\Omega^2 X, \Omega^2 Y, 0)^T$. Elle dérive du potentiel centrifuge :

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{2} \left[\Omega^2 R^2 - (\bar{\Omega} \cdot \bar{R})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 R^2 \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 (X^2 + Y^2) \end{aligned}$$



Toute variation de l'axe de rotation paramétré par (m_1, m_2) comme de la vitesse de rotation (m_3) modifie le vecteur rotation de la Terre :

$$\bar{\Omega} = \Omega_o (m_1 \bar{X}_u + m_2 \bar{Y}_u + (1 + m_3) \bar{Z}_u)$$

et par conséquent entraîne une modification du potentiel centrifuge qui devient au 1^{er} ordre en m_i :

$$V_c = V_{c_o} + \Delta V_c = \frac{\Omega_o^2}{2} \left[(X^2 + Y^2)(1 + 2m_3) - 2Z(m_1 X + m_2 Y) \right]$$

D'où une variation qui s'exprime en coordonnée polaire :

$$\Delta V_c = \Omega_o^2 R^2 \left[m_3 \cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) \right]$$

Soit à une constante près $\left(\frac{-2\Omega_o^2 R^2}{3} m_3 \right)$:

$$\Delta V_c = -\frac{\Omega_o^2 R^2}{3} \left[2m_3 P_{20}(\sin \varphi) + P_{21}(\sin \varphi) (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) \right]$$

Typiquement les variations annuelles ou semi-annuelles de la vitesse de rotation de la Terre sont de l'ordre de .01 s, alors que le pôle peut varier à la période de

Chandler de .6". Il s'en suit que m_3 est de deux ordres de grandeur inférieur à (m_1, m_2) et peut donc être négligé :

$$\Delta V_c = -\frac{\Omega_o^2 R^2}{3} P_{21}(\sin \varphi)(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)$$

Le déplacement de la surface de la Terre induit par la variation du potentiel centrifuge représenté par l'harmonique sphérique de degré 2 s'exprime conformément à la formulation de Love :

$$u_r = \frac{h_2}{g} \Delta V_c = -\frac{h_2}{g} \Omega_o^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)$$

$$u_\varphi = \frac{\ell_2}{g} \frac{\partial \Delta V_c}{\partial \varphi} = -\frac{\ell_2}{g} \Omega_o^2 R^2 \cos 2\varphi (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)$$

$$u_\lambda = \frac{\ell_2}{g \cos \varphi} \frac{\partial \Delta V_c}{\partial \lambda} = \frac{\ell_2}{g} \Omega_o^2 R^2 \sin \varphi (m_1 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda)$$

soit en remplaçant les nombres sans dimension m_1, m_2 par les coordonnées du pôle $\bar{x}_p = x_p - \bar{x}, -\bar{y}_p = -(y_p - \bar{y})$ exprimées en radian par rapport au pôle moyen de rotation (\bar{x}, \bar{y}) dans le système classique d'axes polaires :

$$u_r = -13.2 \cdot 10^3 \sin \varphi \cos \varphi (\bar{x}_p \cos \lambda - \bar{y}_p \sin \lambda)$$

$$u_\varphi = -1.9 \cdot 10^3 \cos 2\varphi (\bar{x}_p \cos \lambda - \bar{y}_p \sin \lambda)$$

$$u_\lambda = -1.9 \cdot 10^3 \sin \varphi (\bar{x}_p \sin \lambda - \bar{y}_p \cos \lambda)$$

Le déplacement radial peut atteindre 2 cm. En coordonnées cartésiennes (x, y, z) , il faut appliquer la matrice de transformation :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/R & -zx/R\sqrt{x^2+y^2} & -y/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/R & -zy/R\sqrt{x^2+y^2} & x/\sqrt{x^2+y^2} \\ z/R & \sqrt{x^2+y^2}/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_\lambda \end{bmatrix}$$

En outre, la déformation provoquée par la marée polaire génère un potentiel perturbateur à l'extérieur de la Terre conformément au principe de Dirichlet et à la théorie de Love au degré 2 :

$$\Delta V_{c_p}(r) = k_2 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \Delta V_c(R)$$

Si l'on tient compte de l'ensemble des variations $m_1 = \bar{x}_p$, $m_2 = -\bar{y}_p$, $m_3 = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_o}$,

négligeant le potentiel de degré 0 :

$$\Delta V_{c_p} = -k_2 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{\Omega_o^2 R^2}{3} (2m_3 P_{20}(\sin \varphi) + P_{21}(\sin \varphi)(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda))$$

En identifiant à l'expression du potentiel terrestre :

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} P_{\ell m}(\sin \varphi) (C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda)$$

il résulte des corrections des coefficients C_{2m}, S_{2m} du potentiel terrestre dues à la marée polaire de la forme :

$$\Delta C_{20_c} = -2k_2 \frac{\Omega_o^2 R^5}{3GM R^2} m_3, \quad \Delta C_{21_c} = -k_2 \frac{\Omega_o^2 R^5}{3GM R^2} m_1, \quad \Delta S_{21_c} = -k_2 \frac{\Omega_o^2 R^5}{3GM R^2} m_2$$

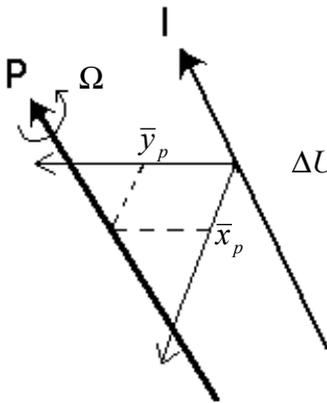
soit en introduisant le nombre de Love séculaire :

$$k_o = \frac{3G(C-A)}{R^5 \Omega_o^2} = -\frac{3GM a_e^2}{R^5 \Omega_o^2} C_{20} = .944 \text{ et les coordonnées } (\bar{x}_p, \bar{y}_p) \text{ du pôle de}$$

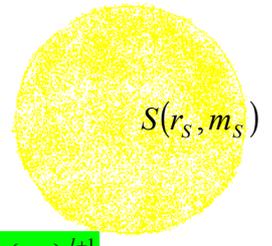
rotation par rapport au pôle moyen :

$$\Delta C_{20_c} = 2 \frac{k_2}{k_o} C_{20} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_o}, \quad \Delta C_{21_c} = \frac{k_2}{k_o} C_{20} \bar{x}_p, \quad \Delta S_{21_c} = -\frac{k_2}{k_o} C_{20} \bar{y}_p$$

Les corrections fonctions de (\bar{x}_p, \bar{y}_p) sont perceptibles à 10^{-10} alors que les corrections dues à $\Delta\Omega$ (10^{-12}) sont inférieures à la précision de restitution de C_{20} (10^{-11}) et donc négligeables.

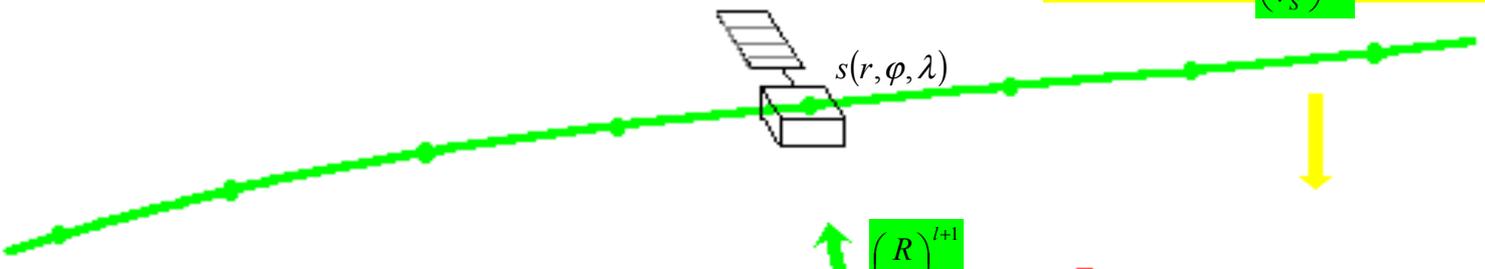


$$\Delta U_c = \frac{\Omega^2 R^2}{3} k_2 \left(\frac{R}{r}\right)^3 [(\bar{x}_p \cos \lambda - \bar{y}_p \sin \lambda) P_{21}(\sin \varphi)]$$



$$U_s = \frac{Gm_s}{r_s} + \frac{Gm_s}{r} \sum_{l=2}^{L'} \left(\frac{r}{r_s}\right)^{l+1} P_{l0}(\cos \psi)$$

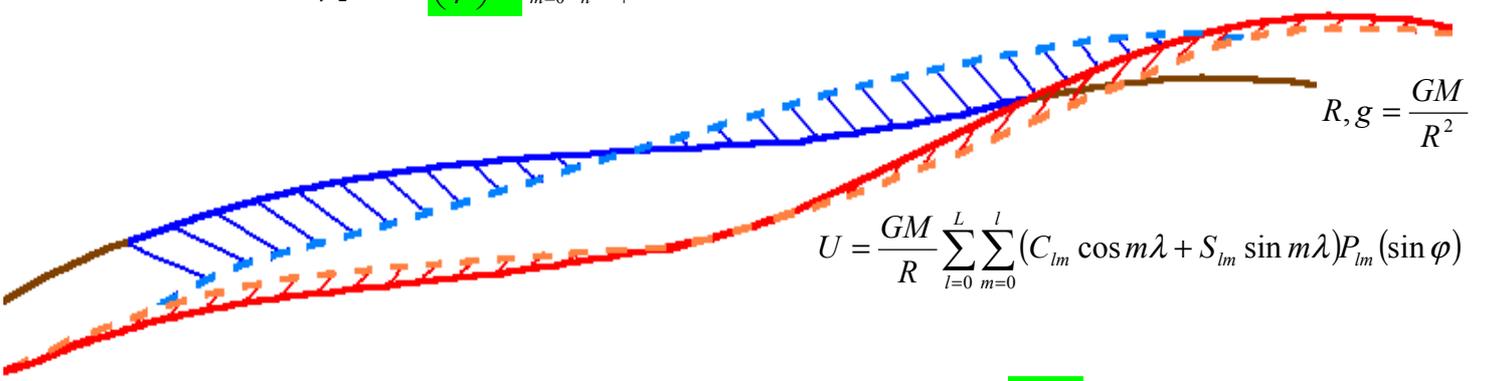
$$U(S) = \frac{Gm_s}{R} \sum_{l=2}^3 \left(\frac{R}{r_s}\right)^{l+1} P_{l0}(\cos \psi)$$



$$\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}$$

$$\Delta U_s = \sum_{l=2}^3 k_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} U_l(S)$$

$$\Delta U_m = 4\pi GR \rho_w \sum_{l=2}^L \frac{1+k'_l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \sum_n \sum_{+} \xi_{n,lm}^{\pm}$$



$$R, g = \frac{GM}{R^2}$$

$$U = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi)$$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^l$$

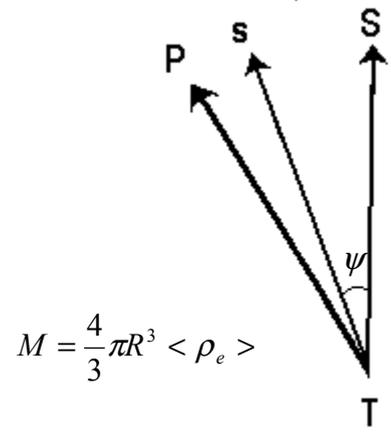
déformations :

$$u_r = \sum_{l=2} h_l \frac{U_s + \Delta U_c}{g}$$

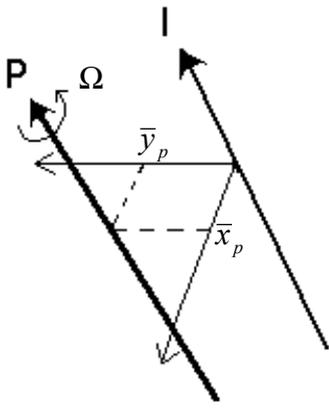
$$\xi_{n,lm}^{\pm} = C_{n,lm}^{\pm} \sin(\theta_n \pm m\lambda + \epsilon_{n,lm}^{\pm}) P_{lm}(\sin \varphi)$$

$$u'_r = \frac{4\pi GR \rho_w}{g} \sum_{l=2}^L \frac{h'_l}{2l+1} \sum_{m=0}^l \sum_n \sum_{+} \xi_{n,lm}^{\pm}$$

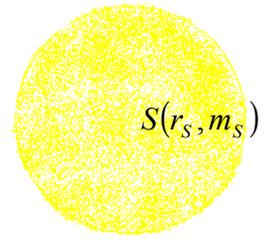
$$= 3 \frac{\rho_w}{\langle \rho_e \rangle} \sum_{l=2}^L \frac{h'_l}{2l+1} \sum_{m=0}^l \sum_n \sum_{+} \xi_{n,lm}^{\pm}$$



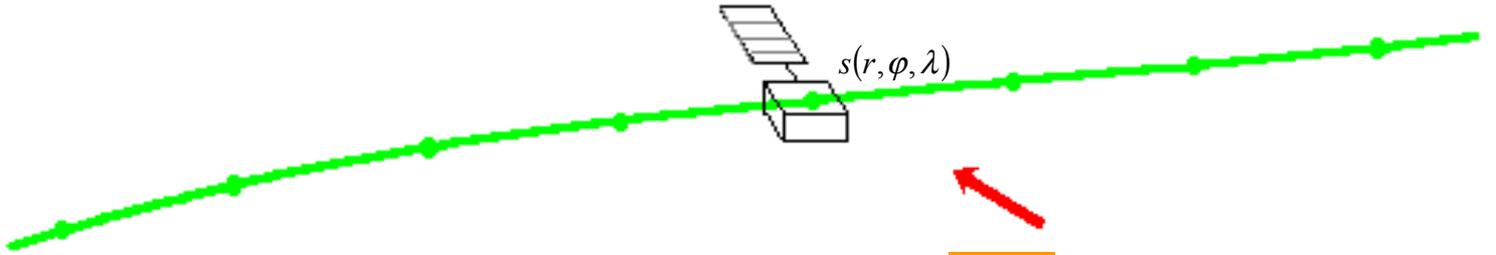
$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \langle \rho_e \rangle$$



$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{21} \\ \Delta S_{21} \end{Bmatrix} = \frac{k_2}{k_0} C_{20} \begin{Bmatrix} x_p \\ -y_p \end{Bmatrix}$$

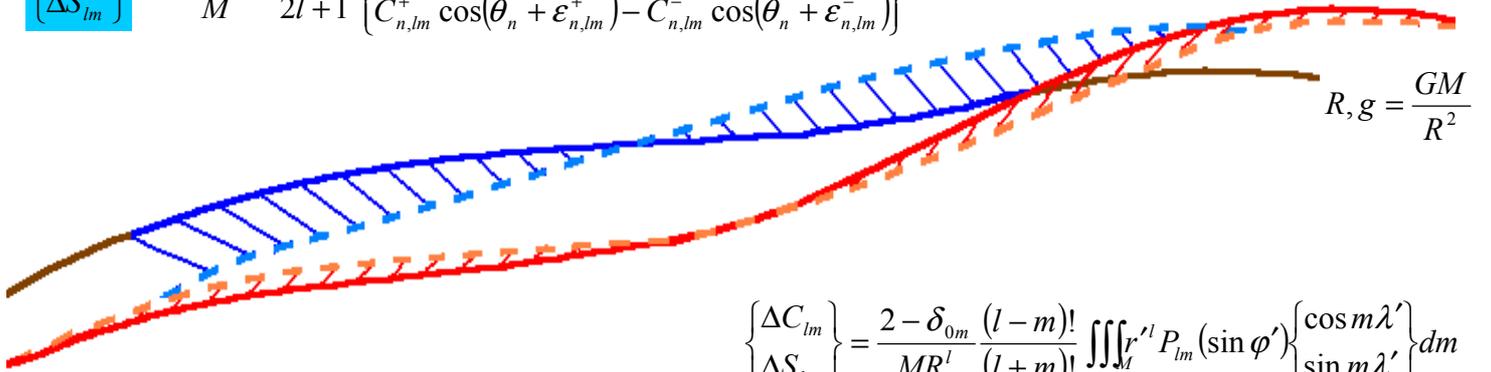


$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix} = (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{Gm_s}{GM} \left(\frac{r}{r_s}\right)^{l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^l \times P_{lm}(\sin \varphi_s) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_s \\ \sin m\lambda_s \end{Bmatrix}$$

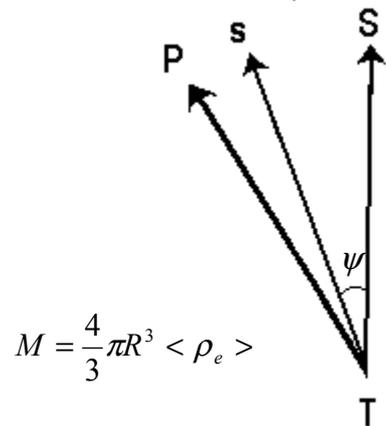


$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix} = k_l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{Gm_s}{GM} \left(\frac{R}{r_s}\right)^{l+1} \times P_{lm}(\sin \varphi_s) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_s \\ \sin m\lambda_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{4\pi R^2 \rho_w}{M} \frac{1+k'_l}{2l+1} \begin{Bmatrix} C_{n,lm}^+ \sin(\theta_n + \varepsilon_{n,lm}^+) + C_{n,lm}^- \sin(\theta_n + \varepsilon_{n,lm}^-) \\ C_{n,lm}^+ \cos(\theta_n + \varepsilon_{n,lm}^+) - C_{n,lm}^- \cos(\theta_n + \varepsilon_{n,lm}^-) \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{2 - \delta_{0m}}{MR^l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \iiint_V r'^l P_{lm}(\sin \varphi') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} dm$$



$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \langle \rho_e \rangle$$

Ordres de grandeur des termes de degré 2

	\bar{C}_{20}	$\bar{C}_{21} / \bar{S}_{21}$	$\bar{C}_{22} / \bar{S}_{22}$
Terre	$- .484 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
Lune			
action directe	$4.7 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$
marée terrestre	$8 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$
marée océanique M₂ semi-diurne	$7 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-10}$
Soleil			
action directe	$2 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-9}$
marée terrestre	$3.5 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$
marée océanique S₂ semi-diurne	$< 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-10}$
Marée polaire			
/ΔΩ séculaire	$5 \cdot 10^{-12}$	-	-
annuel	$1 \cdot 10^{-12}$	-	-
/x_p, y_p annuel + Chandler	-	$4 \cdot 10^{-10}$	