

L'EQUATION D'OBSERVATION DOPPLER

INTRODUCTION

Cette note a pour but de détailler l'équation d'observation Doppler. Comme nous nous placerons d'emblée dans un cadre relativiste, il est nécessaire en premier lieu de rappeler les définitions et formules de la Relativité que nous allons utiliser. C'est l'objet du chapitre 1.

Le Chapitre 2 détaille l'équation d'observation Doppler ; le chapitre 3 indique comment cette équation est implémentée dans le logiciel d'orbitographie GINS, ainsi que la façon dont les paramètres empiriques liés à la mesure sont déterminés.

1. RAPPEL DES DEFINITIONS ET FORMULES DE LA RELATIVITE

1.1. DEFINITIONS

Temps propre : noté τ . C'est le seul temps correspondant à une réalité matérielle. Par exemple 1 battement d'une horloge atomique définit un intervalle de temps propre : $d\tau$. Les mesures de temps étant effectuées par l'horloge du récepteur, c'est à cette unité $d\tau$, que nous chercherons à nous ramener. Le temps propre τ d'une horloge est relié à la distance propre s le long de la géodésique de l'horloge (trajectoire suivie par l'horloge en l'absence de forces non gravitationnelles) via la vitesse de la lumière c : $ds^2 = c^2 d\tau^2$.

Temps coordonné : noté t . C'est la quatrième dimension d'un référentiel d'espace-temps (x, y, z, t) . Les équations de la relativité générale donnent les relations entre le temps propre d'une horloge et ses coordonnées (x, y, z, t) dans un référentiel, ainsi que les formules de changement de référentiel.

1.2. FORMULES

a) En l'absence de toute masse (relativité restreinte) :

Dans tous les systèmes de référence galiléens, c'est à dire en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, la métrique minkowskienne donne la relation entre l'élément de longueur propre ds et les coordonnées d'espace-temps (dx, dy, dz, dt) :

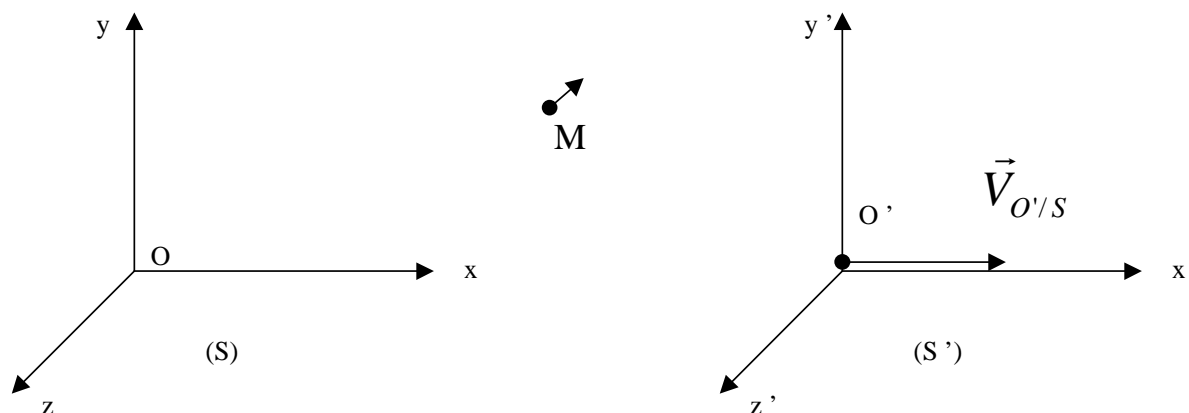
$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Le principe de la relativité énonce l'invariance de ds^2 par changement de repère.

La transformation de Lorentz donne les formules de changement de repère qui permettent à la fois d'assurer l'invariance de ds^2 et de ne pas modifier la métrique minkowskienne.

Définissons la vitesse d'un point M de coordonnées (x, y, z, t) dans un référentiel (S) comme le vecteur $\vec{V}_{M/S} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$.

Supposons deux référentiels (S) et (S'), d'axes parallèles, en glissement uniforme le long de Ox à la vitesse $V_{O'/S}$.



La transformation de Lorentz est, pour le point M :

$$M_{/S'} = \begin{cases} x' = \frac{x - V_{O'/S}t}{\sqrt{1 - \frac{V_{O'/S}^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{V_{O'/S}}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V_{O'/S}^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Si une horloge est située en M, on a bien la conservation de ds :

$$ds'^2 = ds^2 = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

D'autre part la vitesse de O' dans le repère (S) est l'opposée de la vitesse de O dans le repère (S'), ce qu'on peut vérifier facilement en formant les quantités dx'_o et dt'_o pour $x_o = 0$.

b) En présence de masse (relativité générale) :

On se restreint ici à l'hypothèse d'un corps statique à symétrie sphérique, donc à la solution de Schwarzschildⁱ.

ⁱ Les hypothèses nécessaires pour obtenir les solutions de Schwarzschild intérieure et extérieure aux masses sont :

- Equations d'Einstein
- Source statique à symétrie sphérique
- Espace asymptotiquement plat, c'est à dire que l'on retrouve la solution de Minkowski quand la distance à la source tend vers l'infini.

On peut exprimer la métrique de Schwarzschild soit en coordonnées dites « de Schwarzschild », soit en coordonnées isotropes.

Si l'on se place dans un repère d'axes d'inertie fixe ayant pour origine le centre de la Terre, la solution de Schwarzschild extérieure s'exprime au point M (x,y,z,t) en coordonnées isotropes :

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{U(x,y,z)}{2c^2}}{1 + \frac{U(x,y,z)}{2c^2}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{U(x,y,z)}{2c^2} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Où $U(x,y,z)$ est le potentiel gravitationnel au point M.

Si l'on fait de plus l'hypothèse que ce champ de gravitation est faible ($\frac{U}{2c^2} \ll 1$), on peut simplifier l'équation ci-dessus et on obtient l'approximation suivante :

$$(1) \quad \boxed{ds^2 \approx \left(1 - \frac{2U(x,y,z)}{c^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2U(x,y,z)}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

L'équation (1) permet deux applications intéressantes suivant que l'on place une horloge ou un photon au point M :

- **Application au cas horloge**

Appelons (S) le référentiel dans lequel est donné la solution de Schwarzschild (fixe, au centre de la Terre). Nous avons défini la vitesse comme le vecteur $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$. On peut donc réécrire l'équation

(1) en appelant V_H la vitesse de l'horloge dans le référentiel (S) :

$$ds^2 \approx \left[1 - \frac{2U_H}{c^2} - \left(1 + \frac{2U_H}{c^2} \right) \frac{V_H^2}{c^2} \right] c^2 dt^2$$

Si la vitesse de l'horloge est faible devant la vitesse de la lumière ($\frac{V_H}{c} \ll 1$) le terme $\frac{2U_H}{c^2} \frac{V_H^2}{c^2}$ devient négligeable et l'on obtient la relation simplifiée liant le temps propre d'une horloge à ses coordonnées d'espace-temps :

$$d\tau_H = \frac{ds_H^2}{c^2} \approx \left[1 - \frac{2U_H}{c^2} - \frac{V_H^2}{c^2} \right] dt^2$$

Ce qui après nouvelle simplification donne :

$$(2) \quad \boxed{d\tau_H \approx \left[1 - \frac{U_H}{c^2} - \frac{V_H^2}{2c^2} \right] dt}$$

Cette relation va nous permettre de passer d'un intervalle de temps propre d'une horloge $\Delta\tau$ à un intervalle de temps coordonnée Δt .

- **Application au cas lumière**

On sait que les photons suivent des géodésiques de longueur nulle : $ds_{lum}^2 = c^2 d\tau_{lum}^2 = 0$.

En reportant dans (1) on obtient :

$$0 \approx \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$$

Si on appelle $d\rho$ un élément de trajet, $d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et que l'on fait comme précédemment l'hypothèse de champ faible : $\frac{U}{c^2} \ll 1$, alors :

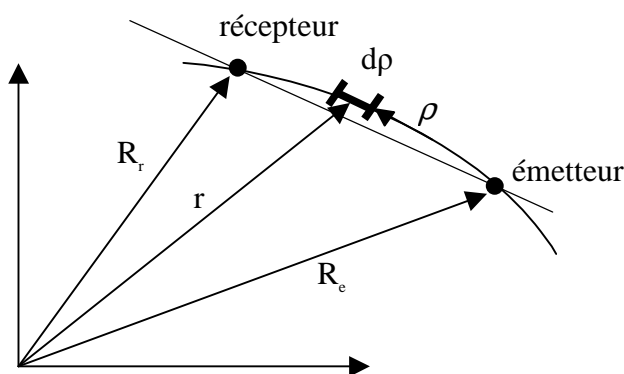
$$dt^2 \approx \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)^2 \frac{d\rho^2}{c^2}$$

Soit, en appelant « émetteur » et « récepteur » les points de départ et d'arrivée du photon :

$$\Delta t_{\text{trajet_lumière}} \approx \frac{1}{c} \int_{\text{émetteur}}^{\text{récepteur}} \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) d\rho$$

En considérant $U \approx \frac{GM}{r}$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ distance au centre du corps attracteur, on obtient :

$$\Delta t_{\text{trajet_lumière}} \approx \frac{1}{c} \int_{\text{émetteur}}^{\text{récepteur}} \left(1 + 2 \frac{GM}{r c^2}\right) d\rho$$



L'intégration de cette équation donne :

$$(3) \quad \Delta t_{\text{trajet}} \approx \frac{\rho}{c} + 2 \frac{GM}{c^3} \ln \left(\frac{R_e + R_r + \rho}{R_e + R_r - \rho} \right)$$

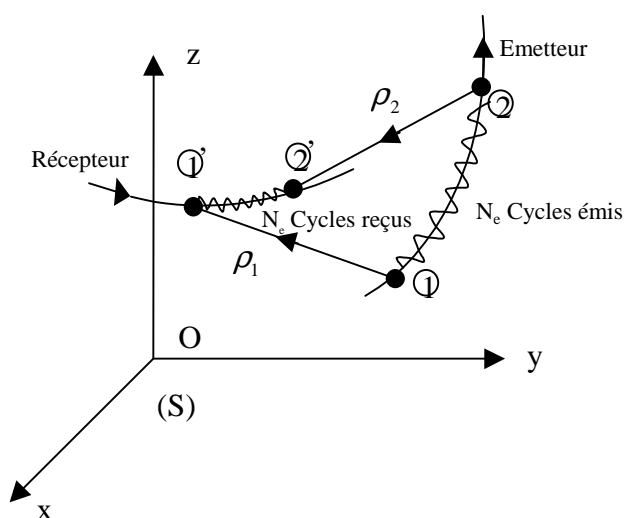
Où ρ est la longueur curviligne du trajet égale, au premier ordre, à la distance géométrique entre les extrémités, et R_e et R_r sont les rayons des points de départ et d'arrivée.

Les équations (2) et (3) vont nous permettre d'écrire l'équation d'observation Doppler, dans le cadre relativiste.

2. L'EQUATION D'OBSERVATION DOPPLER

Définissons les 4 événements :

- ① Emission du 1^{er} cycle par l'émetteur
- ② Emission du N_e -ième cycle par l'émetteur
- ①' Réception du 1^{er} cycle par le récepteur
- ②' Réception du N_e -ième cycle par le récepteur



Les événements sont datés τ_{e_1}, τ_{e_2} en temps propre émetteur, τ_{r_1}, τ_{r_2} en temps propre récepteur et t_1, t_1', t_2, t_2' en temps coordonnée dans le repère (S).

Durant l'intervalle $\Delta\tau_r = \tau_{r_2} - \tau_{r_1}$, le récepteur a reçu les N_e cycles envoyés par l'émetteur, avec $N_e = f_e \Delta\tau_e$, f_e étant la fréquence propre de l'émetteur. Le récepteur possède lui aussi un oscillateur et sur le même intervalle $\Delta\tau_r$, il a d'autre part généré un nombre $N_r = f_r \Delta\tau_r$ de cycles, f_r étant la fréquence propre du récepteur. La mesure Doppler est le compte par le récepteur du nombre de cycles de différence entre N_e et N_r :

$$\boxed{N_{DOP} = N_e - N_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_{DOP} = f_e \Delta\tau_e - f_r \Delta\tau_r}$$

Exprimons $\Delta\tau_e$ en $\Delta\tau_r$, par l'intermédiaire du temps coordonnée :

$$\Delta\tau_e = \tau_{e_2} - \tau_{e_1} \approx \left(1 - \frac{U_e}{c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2}\right) (t_2 - t_1) \quad \text{d'après (2)... en supposant } U_e \text{ et } V_e \text{ constants sur } (t_2 - t_1)$$

or :

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= (t_2 - t_{2'}) + (t_{2'} - t_{1'}) + (t_{1'} - t_1) \\ &= -(t_{2'} - t_2) + (t_{2'} - t_{1'}) + (t_{1'} - t_1) \end{aligned}$$

$$t_{2'} - t_2 = \frac{\rho_2}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{R_2 + R_{2'} + \rho_2}{R_2 + R_{2'} - \rho_2} \right) \quad \text{d'après (3)}$$

$$t_{2'} - t_{1'} = \Delta t_r \approx \left(1 + \frac{U_r}{c^2} + \frac{V_r^2}{2c^2} \right) \Delta \tau_r \quad \text{d'après (2)... en supposant } U_r \text{ et } V_r \text{ constants sur } (\tau_2 - \tau_1),$$

c'est à dire, dans le cas d'un Doppler montant, pour une faible excentricité de l'orbite.

$$t_{1'} - t_1 = \frac{\rho_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{R_1 + R_{1'} + \rho_1}{R_1 + R_{1'} - \rho_1} \right) \quad \text{d'après (3)}$$

donc :

$$N_{DOP} = f_e \left(1 - \frac{U_e}{c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2} \right) \left[\left(1 + \frac{U_r}{c^2} + \frac{V_r^2}{2c^2} \right) \Delta \tau_r - \frac{\rho_2 - \rho_1}{c} + 2 \frac{GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{R_1 + R_{1'} + \rho_1}{R_1 + R_{1'} - \rho_1} \right) - \ln \left(\frac{R_2 + R_{2'} + \rho_2}{R_2 + R_{2'} - \rho_2} \right) \right] \right] - f_r \Delta \tau_r$$

Ordres de grandeur au voisinage de la Terre (c'est à dire à moins de 10000 km d'altitude) pour $\Delta \tau_r = 10s$:

$$* \quad \frac{U}{c^2} \text{maxi} \sim \frac{4 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^3 \times 9 \cdot 10^{10}} \sim 8 \cdot 10^{-10}$$

$$* \quad \frac{V^2}{2c^2} \text{maxi} \sim \frac{8^2}{2 \times 9 \cdot 10^{10}} \sim 4 \cdot 10^{-10}$$

$$* \quad \frac{\rho_2 - \rho_1}{c} \text{maxi} \sim \frac{80}{3 \cdot 10^5} \sim 2.6 \cdot 10^{-4}$$

$$* \quad 2 \frac{GM}{c^3} \ln \left(\frac{R_d + R_a + \rho}{R_d + R_a - \rho} \right) \sim 2 \frac{4 \cdot 10^5}{27 \cdot 10^{15}} \ln \left(\frac{12 \cdot 10^3 + 10^4}{12 \cdot 10^3 - 10^4} \right) \sim 7 \cdot 10^{-11} \text{maxi}$$

En négligeant les termes produisant un effet inférieur à $7 \cdot 10^{-5}$ cyclesⁱⁱ, on peut simplifier l'expression de N_{DOP} (GM est noté μ) :

$$N_{DOP} = (f_e - f_r) \Delta \tau_r - f_e \left(1 - \frac{\mu}{R_e c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2} \right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{c} - \frac{f_e}{c^2} \left(\frac{\mu}{R_e} - \frac{\mu}{R_r} + \frac{V_e^2}{2} - \frac{V_r^2}{2} \right) \Delta \tau_r + 2 \frac{GM}{c^3} f_e \left[\ln \left(\frac{R_1 + R_{1'} + \rho_1}{R_1 + R_{1'} - \rho_1} \right) - \ln \left(\frac{R_2 + R_{2'} + \rho_2}{R_2 + R_{2'} - \rho_2} \right) \right]$$

ⁱⁱ La valeur $7 \cdot 10^{-5}$ cycles correspond, une fois traduit en vitesse par l'intermédiaire du facteur de conversion

$\frac{c}{f_e \Delta t}$ avec $f_e \approx 2 \cdot 10^9$ Hz et $\Delta t \approx 10s$, à une vitesse relative émetteur-récepteur de 10^{-6} m/s.

On peut donc écrire le compte Doppler théorique comme la somme de 4 termes (auxquels il faudra ajouter les corrections de propagation troposphérique et ionosphérique) :

$$N_{DOP THE} = \underbrace{\Delta N_{BATT}}_{\text{Battement}} + \underbrace{\Delta N_{DOP}}_{\text{Doppler}} + \underbrace{\Delta N_{REL H}}_{\text{Relativité horloges}} + \underbrace{\Delta N_{REL T}}_{\text{Relativité trajet}}$$

Avec :

$$(4) \quad \Delta N_{BATT} = (f_e - f_r) \Delta \tau_r$$

$$\Delta N_{DOP} = -f_e \left(1 - \frac{\mu}{R_e c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2} \right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{c}$$

$$\Delta N_{REL H} = \frac{-f_e \Delta \tau_r}{c^2} \left[\mu \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_r} \right) + \frac{V_e^2 - V_r^2}{2} \right]$$

$$\Delta N_{REL T} = 2 \frac{\mu f_e}{c^3} \left[\ln \left(\frac{R_1 + R_{1'} + \rho_1}{R_1 + R_{1'} - \rho_1} \right) - \ln \left(\frac{R_2 + R_{2'} + \rho_2}{R_2 + R_{2'} - \rho_2} \right) \right]$$

Ces équations sont valables en Doppler montant ou descendant. On utilise ensuite cette formulation théorique pour constituer la quantité $\Delta Q = N_{OBS} - N_{THE}$ et calculer les corrections aux paramètres que l'on désire déterminer.

Remarques importantes :

$\Delta \tau_r$ est un intervalle de temps propre récepteur. ρ_2 et ρ_1 sont des distances calculées à partir des temps coordonnée $(t_2, t_{2'})$ et $(t_1, t_{1'})$. Ce qui entraîne trois conséquences :

- Il est primordial de savoir dans quelle échelle de temps sont datées les mesures et comment la conversion d'échelle a été effectuée.
- Si l'on veut réécrire l'équation d'observation pour l'exprimer sous forme de vitesse relative émetteur-récepteur dans le référentiel (S) ou bien si l'intervalle de temps auquel on a accès est un intervalle de temps TAIⁱⁱⁱ (Δt_{TAI} au lieu de $\Delta \tau_r$), il faut appliquer les corrections relativistes à

$$\Delta \tau_r \text{ dans l'équation (4) : } \begin{cases} \Delta \tau_r \approx \left(1 - \frac{U_r}{c^2} - \frac{V_r^2}{2c^2} \right) \Delta t \\ \Delta t_{TAI} \approx \left(1 - \frac{U_{GEO}}{c^2} \right) \Delta t \end{cases}$$

U_{GEO} étant le potentiel gravitationnel du géoïde.

$$\Rightarrow \Delta \tau_r \approx \left(1 - \frac{U_r}{c^2} - \frac{V_r^2}{2c^2} + \frac{U_{GEO}}{c^2} \right) \Delta t_{TAI}$$

ⁱⁱⁱ Le temps TAI (Temps Atomique International) est l'*ancien* temps « TT ». Il peut être considéré comme la réalisation, au niveau du géoïde, du temps coordonnée t du référentiel (S). Il diffère donc de t d'un taux

constant : $L_G = \frac{U_{GEO}}{c^2} = 6.96929013010^{-10}$ (cf. IERS conventions 2000, chapitres 1 et 10).

(Dans ΔN_{REL_H} , cette correction de $\Delta \tau_r$ introduira des effets du second ordre totalement négligeables.)

- En ce qui concerne le calcul de ρ : ρ est calculé à partir de la position de l'émetteur à l'instant t_α et du récepteur à l'instant $t_{\alpha'}$. La quantité qui est connue en général est le temps coordonné de réception $t_{\alpha'}$ (calculé d'ailleurs à partir de $\tau_{r_{\alpha'}}$ dans le processus de re-datation des mesures effectué au sol). Pour calculer précisément t_α (et donc la position de l'émetteur à cet instant t_α), il faut faire une correction d'aberration, c'est-à-dire calculer de façon approchée la distance émetteur-récepteur : ρ_{app} en évaluant la position de l'émetteur à l'instant $t_{\alpha'}$, puis déterminer t_α en appliquant la correction : $t_\alpha = t_{\alpha'} - \frac{\rho_{app}}{c}$.
- Dans les équations (4) les termes correctifs les plus faibles sont ΔN_{REL_T} et le terme en $\left(-\frac{\mu}{R_e c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2} \right)$ dans ΔN_{DOP} . Ils ont des valeurs maximales de respectivement 8. et 4. 10^{-4} cycles, soit 11. et 6. 10^{-6} m/s. Suivant la précision recherchée ils peuvent donc éventuellement être négligés.

Références :

Essai sur les corrections relativistes appliquées à l'expérience LASSO - Richard Biancale.

Relativistic correction to satellite Doppler Observation – Claude Boucher

Relativity and cosmology – Robertson & Noonan.

IERS Convention 2000 : <http://maia.usno.navy.mil/conv2000.html>

3. L'ÉQUATION DOPPLER DANS GINS

Dans GINS on raisonne en vitesse relative émetteur-récepteur et non en nombre de cycles.

L'équation (4) se réécrit donc :

$$(5) \quad Q_{THE} = -\left(1 - \frac{\mu}{R_e c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2}\right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta\tau_r} + \frac{c}{f_e} (f_e - f_r) - \frac{1}{c} \left[\mu \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_r} \right) + \frac{V_e^2 - V_r^2}{2} \right] + \frac{c}{f_e \Delta\tau_r} \Delta N_{REL_T}$$

$$\text{et } Q_{OBS} = \frac{c}{f_e \Delta\tau_r} N_{OBS}$$

Il faut tenir compte à présent du fait que dans le cas réel, les fréquences des émetteurs et des récepteurs présentent des écarts par rapport à leur fréquence nominale : $f_e = f_{e_N} + \Delta f_e$, $f_r = f_{r_N} + \Delta f_r$. Ces écarts sont à déterminer pour obtenir une quantité théorique correcte. Etant donné qu'il n'est pas possible de libérer en même temps les deux biais de fréquence, ceux-ci étant trop corrélés, on choisit dans GINS de modéliser du mieux possible la fréquence satellite (récepteur donc dans le cas de DORIS) et de libérer un biais de fréquence station par passage (éventuellement un biais et une pente, Δf_e s'exprimant alors sous la forme $\alpha + \beta t$).

Le fait que la fréquence récepteur soit non nominale conduit par ailleurs le segment sol, en dehors des considérations relativistes, à effectuer une re-datation des mesures a posteriori pour ramener la datation faite à bord (dans une échelle de temps légèrement erronée) en échelle de temps TAI. Il y a donc une correction de la date de la mesure et du temps de comptage.

On réécrit les équations (5) sous forme d'une pseudo-mesure théorique : ZQT et d'une pseudo-mesure observée : ZQM dans laquelle on transfère tout ce qui, dans la mesure théorique, n'est pas fonction des paramètres libérables : Δf_e et (ρ_2, ρ_1) , et qui restera donc constant d'une itération à l'autre ; ce qui allège ZQT, recalculée à chaque itération. La correction relativiste en particulier, quasiment invariante d'une itération à l'autre, est transférée dans ZQM.

Les équations (5) se réécrivent donc, en négligeant les termes en $\frac{\Delta f_e}{f_{e_N}^2}$ et $\frac{\Delta f_e^2}{f_{e_N}^2}$:

$$ZQT = \left(1 - \frac{\mu}{R_e c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2}\right) \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta\tau_r} + \frac{c \left(\frac{N_{OBS}}{\Delta\tau_r} + (f_{r_N} + \Delta f_r) \right)}{f_{e_N}^2} \Delta f_e$$

$$ZQM = \frac{c}{f_{e_N} \Delta\tau_r} N_{OBS} - \frac{c}{f_{e_N}} (f_{e_N} - (f_{r_N} + \Delta f_r)) + \frac{1}{c} \left[\mu \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_r} \right) + \frac{V_e^2 - V_r^2}{2} \right] - \frac{c}{f_{e_N} \Delta\tau_r} \Delta N_{REL_T}$$

Soit, en tenant compte des corrections ionosphériques et troposphériques :

$$ZQT = \left(1 - \frac{\mu}{R_e c^2} - \frac{V_e^2}{2c^2}\right) \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta\tau_r} + \frac{c \left(\frac{N_{OBS}}{\Delta\tau_r} + (f_{r_N} + \Delta f_r) \right)}{f_{e_N}^2} \Delta f_e - \Delta V_{IONO}$$

$$ZQM = \frac{c}{f_{e_N}} \left(\frac{N_{OBS}}{\Delta\tau_r} + (f_{r_N} + \Delta f_r) - f_{e_N} \right) + \Delta V_{RELH} + \Delta V_{RELT} + \Delta V_{TROPO}$$

Avec :

$$\Delta V_{RELH} = \frac{1}{c} \left[\mu \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_r} \right) + \frac{V_e^2 - V_r^2}{2} \right]$$

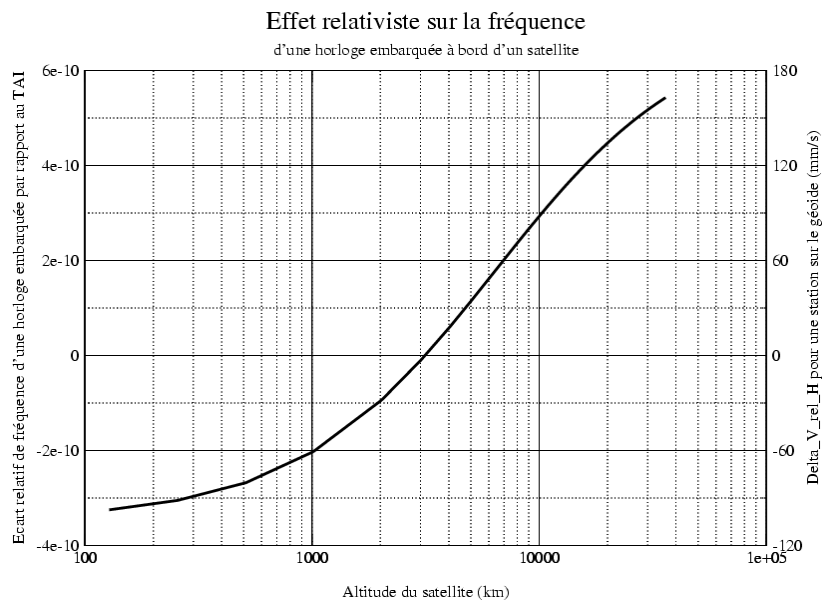
$$\Delta V_{RELT} = -\frac{2\mu}{\Delta\tau_r c^2} \left[\ln \left(\frac{R_1 + R_1 + \rho_1}{R_1 + R_1 - \rho_1} \right) - \ln \left(\frac{R_2 + R_2 + \rho_2}{R_2 + R_2 - \rho_2} \right) \right]$$

$$\Delta\tau_r = \left(1 - \frac{\mu}{R_r c^2} - \frac{V_r^2}{2c^2} + \frac{U_{GEO}}{c^2} \right) \Delta t_{TAI}$$

Remarques :

1. Le terme $\frac{c \left(\frac{N_{OBS}}{\Delta\tau_r} + (f_{r_N} + \Delta f_r) \right)}{f_{e_N}^2}$ est à peu de choses près égal à $\frac{c + ZQM}{f_{e_N}}$.

2. La figure suivante donne une idée de l'ordre de grandeur de l'effet relativiste sur la fréquence d'une horloge embarquée. L'échelle de gauche indique l'écart relatif de fréquence d'une horloge embarquée par rapport au TAI ; l'échelle de droite indique la valeur de ΔV_{RELH} , en mm/s, pour une station située sur le géoïde (Doppler montant).



3. Une erreur sur la correction relativiste (par exemple une erreur de signe) sera presque entièrement compensée par un ajustement par passage de la fréquence émetteur. Ceci est vrai au 1^{er} ordre, mais non au 2^{ème} ordre car l'excentricité de l'orbite du satellite va induire une légère variation de ΔV_{REL} sur la longueur d'un passage. Les ordres de grandeur, pour un satellite à 800 km d'altitude d'excentricité $e = 2.5 \cdot 10^{-3}$, sont les suivants :

- Correction relativiste $\Delta V_{REL_H} \approx -70 \text{ mm/s}$
- Correction relativiste $\Delta V_{REL_T} \approx \pm 7 \cdot 10^{-3} \text{ mm/s}$!
- Variation de ΔV_{REL_H} sur un passage $\approx \pm 9 \cdot 10^{-2} \text{ mm/s}$

On voit que la variation de ΔV_{REL_H} sur un passage n'atteint que 0.1 mm/s, soit trois fois moins que les 0.3 mm/s d'erreur dus à l'instabilité des oscillateurs. Les effets du 2^{ème} ordre seront pratiquement indiscernables pour une orbite aussi peu excentrique.

L'effet relativiste sur le temps de trajet du signal ΔV_{REL_T} est quant à lui – pour SPOT ou TOPEX/JASON – insignifiant.

Il faut cependant formuler la mesure Doppler de la manière la plus rigoureuse possible car les données du problème changeraient pour des orbites plus excentriques que celle de SPOT ou TOPEX/JASON.

En particulier, il est important de traiter soigneusement le problème des mesures. Il serait souhaitable dans le cas d'orbite très excentrique, quand on fait la conversion du temps propre du récepteur dans lequel sont datées originellement les mesures à un temps coordonnée (par exemple le TAI), de ne pas tenir compte simplement d'un biais de fréquence du récepteur (et donc d'une dérive linéaire de son échelle de datation) mais également des effets relativistes qui s'exercent sur son horloge.

En effet dans le Doppler classique, les récepteurs sont des stations terrestres et leur décalage de marche par rapport au TAI – à l'instabilité de leurs oscillateurs près – est linéaire : l'effet relativiste se réduit à un biais de fréquence proportionnel à l'altitude du récepteur au-dessus du géoïde.

Pour un Doppler montant de type Doris au contraire le récepteur est à bord du satellite et son échelle de temps n'est plus linéaire par rapport au TAI. L'effet périodique est cependant faible : de l'ordre de $\pm 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ pour une excentricité = 0.01 et ne devrait pas perturber notablement la datation des mesures dans le cas de SPOT ou TOPEX/JASON.