LES EQUATIONS VARIATIONNELLLES

- **Jean-Charles MARTY**
- **CNES/GRGS**

Équation du mouvement: $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Avec : $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

t: temps

Est intégrée numériquement (GINS: Cowell)

Avec à t= t_0: $\vec{r} = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$

Conditions initiales $\vec{\varepsilon}_0$

En fait on a: $$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t, \vec{\varepsilon}_d) \qquad (1)}$$

Avec $\vec{\varepsilon}_d$ les paramètres du modèle dont dépendent les forces (ex: coeff. de traînée, coeff. de pression de radiation solaire, coeff. du champ de gravité…)

On réalise des mesures Q que l'on peut écrire:

$$Q = Q_{th}(\varepsilon_0, \varepsilon_d, \varepsilon_m) + \xi$$

Conditions initiales

Coeff. dynamiques

Coeff. dépendant des mesures

(biais de distance, de datation, d'horloges ambiguïtés de phase, correction troposphérique...)

Erreur commise sur chaque mesure (inconnue)

On linéarise autour des valeurs nominales de $\varepsilon_0, \varepsilon_d, \varepsilon_m$ et on écrit:

$$Q = Q_{th}(\varepsilon_0, \varepsilon_d, \varepsilon_m) + \sum_p \frac{\partial Q_{th}}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon + \xi$$

ξ inconnue $\Rightarrow$ $\boxed{Q - Q_{th}(\varepsilon_0, \varepsilon_d, \varepsilon_m) = \sum_p \frac{\partial Q_{th}}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon \quad (2)}$

- pour ε_m: expression directe de $\dfrac{\partial Q_{th}}{\partial \varepsilon_m}$

- pour $\varepsilon_D = (\varepsilon_0, \varepsilon_d)$: on doit écrire:

$$\frac{\partial Q_{th}}{\partial \varepsilon_D} = \sum \frac{\partial Q_{th}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon_D} = \frac{\partial Q_{th}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_D} + \frac{\partial Q_{th}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_D} + \frac{\partial Q_{th}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varepsilon_D}$$

$\dfrac{\partial Q_{th}}{\partial \vec{r}}$: expression directe

Il reste à calculer les $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon_D}$ et pour ce faire, on dérive l'équation (1) par rapport à ε_D

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon_D}\right) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon_D} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \varepsilon_D} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varepsilon_D} \qquad (3)}$$

Ce sont les équations aux variations

Avec à $t=t_0$:

- si $\varepsilon_D = \varepsilon_d$: paramètres dynamiques $\dfrac{\partial \vec{r}_0}{\partial \varepsilon_d} = \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_0}{\partial \varepsilon_d} = 0$

- si $\varepsilon_D = \varepsilon_0$: les conditions initiales, on a:

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_0}{\partial \varepsilon_0^1} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dfrac{\partial x_0}{\partial \varepsilon_0^6} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial \dot{z}_0}{\partial \varepsilon_0^1} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dfrac{\partial \dot{z}_0}{\partial \varepsilon_0^6} \end{bmatrix}$$

Si $\varepsilon_0 = (\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)$ $D=I_6$

Si $\varepsilon_0 = (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$

D est la Jacobienne $\dfrac{\partial(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)}{\partial(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)}$

Les équations aux variations sont donc à intégrer en parallèle avec l 'équation du mouvement

<u>Problème:</u> En général les dérivées partielles varient beaucoup moins vite que $\vec{r}$ et $\dot{\vec{r}}$

On devrait utiliser un pas d 'intégration plus grand ou un intégrateur d 'ordre moins élevé

Mais difficulté d 'implémentation

Donc en général on choisit d 'intégrer les équations aux variations avec le même intégrateur que pour (1)

AUTRE METHODE: on peut réécrire les équations aux variations par rapport aux conditions initiales $\varepsilon_0 = (\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)} \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)}\right) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)} \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

La solution générale est de la forme:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)} \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)} \end{bmatrix} = \Omega(t,t_0)\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \vec{r}_0}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)} \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_0}{\partial(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0)} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec}\quad \Omega(t,t_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dfrac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial \dot{z}}{\partial x_0} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dfrac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] \\ \\ \left[\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] \end{bmatrix}$$

Matrices (3,6)

Le système (4) se réécrit:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] \\ \\ \left[\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0].\left[\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] & [I].\left[\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] \\ \\ \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\right].\left[\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] & \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right].\left[\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \vec{\varepsilon}_0}\right] \end{bmatrix}$$

$$[0],[I],\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\right],\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right]$$

Matrices (3,3)

C'est-à-dire:

$$\frac{d}{dt}[\Omega(t,t_0)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\right] & \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right] \end{bmatrix} \Omega(t,t_0) \quad \text{avec} \quad \Omega(t_0,t_0) = I_6 \quad (5)$$

On peut écrire à partir de (5): $\dot{\Omega} = A.\Omega \quad (5')$

On a d'autre part : $\dot{(\Omega^{-1}\Omega)} = \dot{\Omega}^{-1}\Omega + \Omega^{-1}\dot{\Omega} = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{\Omega}^{-1}\Omega = -\Omega^{-1}\dot{\Omega} \\ &\Rightarrow \dot{\Omega}^{-1}\Omega = -\Omega^{-1}A\Omega \\ &\Rightarrow \dot{\Omega}^{-1} = -\Omega^{-1}A\Omega\Omega^{-1} \\ &\Rightarrow \dot{\Omega}^{-1} = -\Omega^{-1}A \end{aligned}$$

Donc $$\boxed{\frac{d}{dt}[\Omega^{-1}(t,t_0)] = \Omega^{-1}(t,t_0) \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\right] & \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right] \end{bmatrix} \quad (6)}$$

Pour les équations aux variations par rapport aux paramètres dynamiques (avec $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^r$), on pose: $\vec{z}_d = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon_d}$ et $\dot{\vec{z}}_d = \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \varepsilon_d}$

Et cela donne:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \vec{z}_d \\ \dot{\vec{z}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [\mathrm{I}] \\ \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\right] & \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_d \\ \dot{\vec{z}}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \varepsilon_d}\right] \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\Omega^{-1}(t,t_0)\begin{bmatrix} \vec{z}_d \\ \dot{\vec{z}}_d \end{bmatrix}\right) = -\Omega^{-1}(t,t_0)\begin{bmatrix} [0] & [\mathrm{I}] \\ \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\right] & \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_d \\ \dot{\vec{z}}_d \end{bmatrix}$$

$$+\Omega^{-1}(t,t_0)\left(\begin{bmatrix} [0] & [\mathrm{I}] \\ \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}}\right] & \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_d \\ \dot{\vec{z}}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \varepsilon_d}\right] \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\Omega^{-1}(t,t_0)\begin{bmatrix}\vec{z}_d\\ \dot{\vec{z}}_d\end{bmatrix}\right)=\Omega^{-1}(t,t_0)\begin{bmatrix}0\\ \left[\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\varepsilon_d}\right]\end{bmatrix} \qquad (7)$$

C'est une équation différentielle du 1er ordre qu'on peut aisément intégrer en utilisant les résultats de l'intégration numérique des équations aux variations par rapport aux paramètres initiaux pour construire $\Omega(t,t_0)$

Remarque 1: si $\varepsilon_0 = (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$

$$\text{On a : } \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}_0 \end{bmatrix} = J_0 . \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

J_0 est la jacobienne de passage (6x6) au point de départ

On pose $J(t) = \Omega(t, t_0).J_0$

et donc $J^{-1}(t) = J_0^{-1}.\Omega^{-1}(t, t_0)$

En multipliant l 'équation(7) par J_0^{-1} on obtient:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(J^{-1}(t) \begin{bmatrix} \vec{z}_d \\ \dot{\vec{z}}_d \end{bmatrix} \right) = J^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \varepsilon_d} \right] \end{bmatrix} \qquad (8)}$$

Même forme que le système (7)

Remarque 2: Cas d'une variable indépendante autre que le temps (régularisation)

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{r}{a_0} \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{a_0}{r}$$

On a les opérateurs : $\frac{d\bullet}{dt} = \frac{a_0}{r}\frac{d\bullet}{d\sigma}$ et $\frac{d\bullet}{d\sigma} = \frac{r}{a_0}\frac{d\bullet}{dt}$

Donc : $\frac{d^2\bullet}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\bullet}{d\sigma}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{r}{a_0}\frac{d\bullet}{dt}\right) = \frac{r}{a_0}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\bullet}{dt}\right) + \frac{1}{a_0}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\bullet}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\bullet}{d\sigma^2} = \frac{r^2}{a_0^2}\frac{d^2\bullet}{dt^2} + \frac{1}{a_0}\frac{dr}{d\sigma}\frac{a_0}{r}\frac{d\bullet}{d\sigma} = \frac{r^2}{a_0^2}\frac{d^2\bullet}{dt^2} + \frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\bullet}{d\sigma}$$

Or : $r\frac{dr}{d\sigma} = \vec{r}\frac{d\vec{r}}{d\sigma} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma} = \frac{1}{r^2}\vec{r}\frac{d\vec{r}}{d\sigma} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\bullet}{d\sigma^2} = \frac{r^2}{a_0^2}\frac{d^2\bullet}{dt^2} + \frac{1}{r^2}\vec{r}\frac{d\vec{r}}{d\sigma}\frac{d\bullet}{d\sigma}}$

Si on repart des équations aux variations par rapport aux conditions initiales (3), en posant: $S(t)=\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{r}}$, $T(t)=\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\dot{\vec{r}}}$ et $Y=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varepsilon_0}$

On obtient : $\dfrac{d^2Y}{dt^2}=S(t).Y+T(t)\cdot\dfrac{\partial Y}{\partial t}$

Et en variable σ : $\dfrac{d^2Y}{d\sigma^2}=\dfrac{r^2}{a_0^2}\dfrac{d^2Y}{dt^2}+\dfrac{1}{r^2}\vec{r}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{d\sigma}\dfrac{dY}{d\sigma}$

$$=\frac{r^2}{a_0^2}\left(S(t).Y+T(t)\cdot\frac{\partial Y}{\partial t}\right)+\frac{1}{r^2}\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\sigma}\frac{dY}{d\sigma}$$

$$=\frac{r^2}{a_0^2}S(t).Y+\frac{r^2}{a_0^2}T(t)\cdot\frac{a_0}{r}\frac{\partial Y}{\partial\sigma}+\frac{1}{r^2}\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\sigma}\frac{dY}{d\sigma}$$

$$=\frac{r^2}{a_0^2}S(t).Y+\left(\frac{r}{a_0}T(t)+\frac{1}{r^2}\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\sigma}\right)\frac{dY}{d\sigma}$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varepsilon_0}\right)=\frac{r^2}{a_0^2}\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varepsilon_0}+\left(\frac{r}{a_0}\frac{\partial\vec{F}}{\partial\dot{\vec{r}}}+\frac{1}{r^2}\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\sigma}\right)\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varepsilon_0}\right) \quad (9)$$

On intègre donc cette équation en même temps que l 'équation du temps et l 'équation de la dynamique.

Pour les paramètres dynamiques on a:

$$\frac{d}{dt}\left(J^{-1}(t)\begin{bmatrix}\vec{z}_d\\ \dot{\vec{z}}_d\end{bmatrix}\right)=J^{-1}(t)\begin{bmatrix}0\\ \left[\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\varepsilon_d}\right]\end{bmatrix}$$

qui devient : $$\frac{d}{d\sigma}\left(J^{-1}(t)\begin{bmatrix}\vec{z}_d\\ \dot{\vec{z}}_d\end{bmatrix}\right)=\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)J^{-1}(t)\begin{bmatrix}0\\ \left[\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\varepsilon_d}\right]\end{bmatrix} \quad (10)$$

LES FORCES STOCHASTIQUES

Les paramètres ajustés sont généralement considérés comme linéairement indépendants. On a aussi la possibilité de prendre en compte des forces « stochastiques » introduites:

- sur tout l 'arc avec une période donnée
- au moment des manœuvres
- au moment des éclipses

Ces forces sont supposées linéaires sur les intervalles de discrétisation.

Si on discrétise en $\left\{t_j\right\}_{j=0,N}$, les forces stochastiques sont alors de la forme:

$$F_i(t_j) = C_i(t_j)$$

i=1,2,3 les axes du repère choisi

C_i : processus de Gauss Markov d'ordre 1

Ces forces sont prises linéaires par morceaux c.a.d:

$$F_i(t) = C_i(t_j)\frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} + C_i(t_{j+1})\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \quad t \in \left[t_j, t_{j+1}\right]$$

Les forces stochastiques sont corrélées deux à deux et leur équation d'évolution est:

$$F_i(t_{j+1}) = e^{-\frac{t_{j+1} - t_j}{\tau}}.F_i(t_j) + \eta_j$$

Les η_j seront pris en compte sous forme de coefficient multiplicatif des termes rajoutés à la matrice normale globale

L 'équation d'évolution s 'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} & -1 & & & 0 \\ & e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & e^{-\frac{t_{N-1}-t_{N-2}}{\tau}} & -1 & \\ 0 & & & e^{-\frac{t_N-t_{N-1}}{\tau}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(t_0) \\ \vdots \\ F(t_N) \end{pmatrix} = [0]$$

C 'est-à-dire A.F=0 et l 'équation normale relative aux corrélations entre les forces stochastiques s 'écrit:

$$A^tA = \begin{bmatrix} e^{-2\frac{t_1-t_0}{\tau}} & -e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} & & & 0 \\ -e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} & 1+e^{-2\frac{t_2-t_1}{\tau}} & -e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -e^{-\frac{t_{N-1}-t_{N-2}}{\tau}} & 1+e^{-2\frac{t_N-t_{N-1}}{\tau}} & -e^{-\frac{t_N-t_{N-1}}{\tau}} \\ 0 & & & -e^{-\frac{t_N-t_{N-1}}{\tau}} & 1 \end{bmatrix}$$

Cette équation sera ajoutée à la matrice normale et chaque terme sera multiplié par $\mathrm{cov}(\eta_j)$ qui vaut:

$$\mathrm{cov}(\eta_j) = e^{-2\frac{t_{j+1}-t_j}{\tau}}\sigma^2$$

Avec σ^2 la variance choisie