

Traitements GPS : satellites bas

Sylvain Loyer

Satellites GPS et Satellites bas : configurations

Le traitement global pour les satellites bas

Equation d'observation de la mesure de pseudo-distance

Equation d'observation de la mesure de phase

Equation du temps de trajet d'un signal

Mesures disponibles à chaque date et pour chaque récepteur

Conditions pour résoudre les paramètres de mesure

Mesures GPS (quelques « grands » chiffres)

Diminuer la taille du système ...

Combinaisons de mesures (entre différents observables)

Combinaisons de mesures (entre différents récepteurs)

Méthode de résolution par blocs

Résolution des ambiguïtés entières

Avantages / Inconvénients des différentes stratégies de traitement

Annexes :

GPS : quelques définitions

Valeur des fréquences des signaux GPS

GPS : un problème forcément gros et peu sur-déterminé...

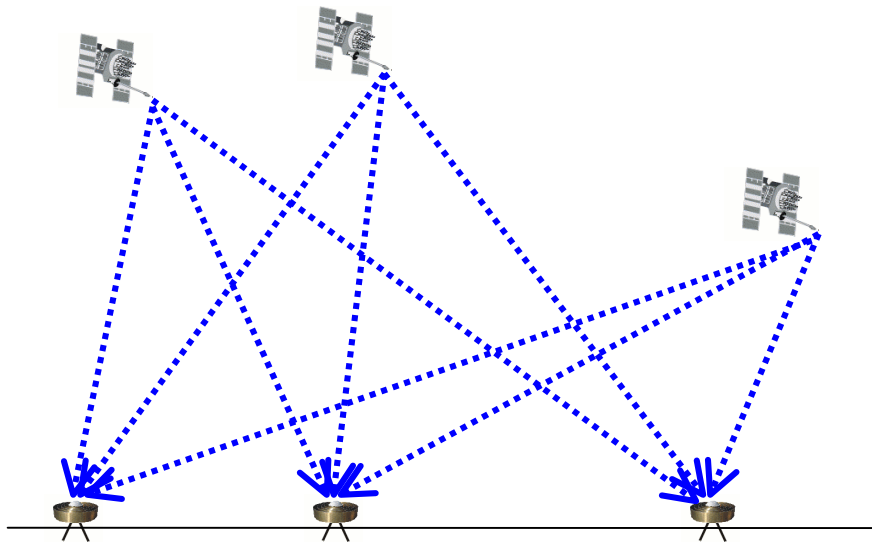
Une condition pour la simultanéité des mesures

Inversion par bloc

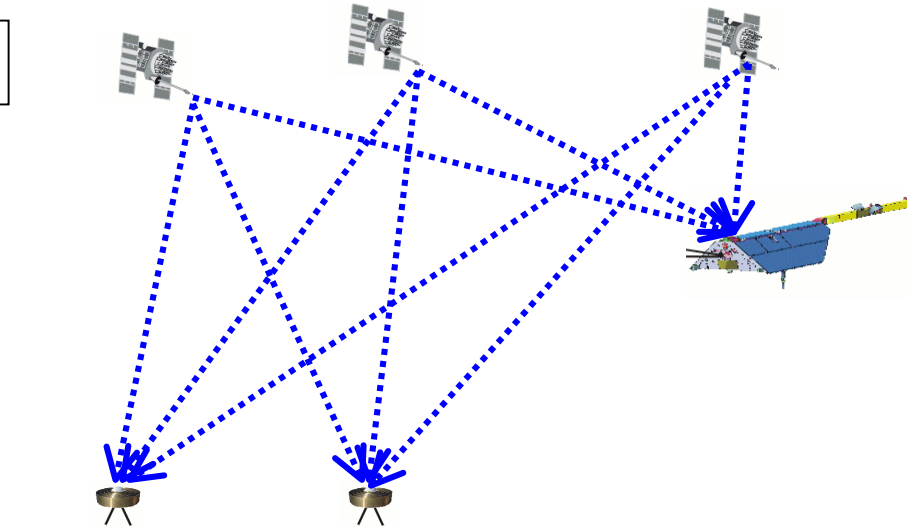


Satellites GPS et Satellites bas : configurations

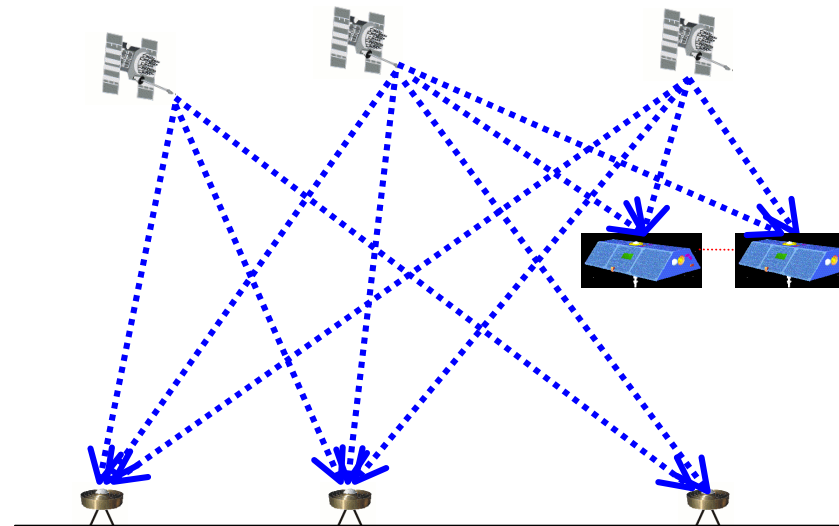
GPS : Configurations hauts-bas



Satellites GPS + recepteurs sol



CHAMP, JASON, GOCE, ...



GRACE A et B



Le traitement global pour les satellites bas

Utiliser l'ensemble des mesures GPS nécessaires pour résoudre de manière globale (dans un même traitement) :

- les orbites des satellites GPS
- l'orbite ou les orbites du (des) satellite(s) bas.
- les paramètres de mesure

Intérêt(s) du traitement global :

- cohérence des standards utilisés (modèles de force et système de référence)
- orbites des satellites GPS contraintes par les mesures sur le(les) satellite(s) bas

Inconvénient majeur : la taille du système.

- 27 satellites GPS + 2 satellites bas.
- entre 40 et 200 stations sol (réseau de l'IGS).
- plusieurs centaines de milliers de mesures.



Equation d'observation de la mesure de pseudo-distance

(ou code ou pseudo-range)

Un récepteur GPS mesure **dans son propre système de datation** le temps de réception du signal émis à une date connue dans le système de datation de l'émetteur :

$$P = c(t_{\text{rec}} - t_{\text{eme}}) + \sigma_c$$

date réception du
signal en temps
récepteur

date émission du
signal en temps
émetteur

On introduit les décalages des horloges par rapport à une horloge de référence :

$$t_{\text{rec}} = t_{\text{Grec}} + \delta_{\text{rec}}$$

$$t_{\text{eme}} = t_{\text{Geme}} + \delta_{\text{eme}}$$

$$\text{Soit : } P = c(t_{\text{Grec}} - t_{\text{Geme}}) + c(\delta_{\text{rec}} - \delta_{\text{eme}})$$

$$P = c \tau + c(\delta_{\text{rec}} - \delta_{\text{eme}}) + \sigma_c$$

τ : temps de trajet du signal GPS entre l'émetteur et le récepteur

c : vitesse de la lumière

t_{rec} : date réception du signal en temps récepteur

t_{Grec} : date réception du signal en temps GPS (ou TAI)

δ_{rec} : décalage entre temps récepteur et temps GPS (ou TAI)

t_{eme} : date émission du signal en temps émetteur

t_{Geme} : date émission du signal en temps GPS (ou TAI)

δ_{eme} : décalage entre temps émetteur et temps GPS (ou TAI)

σ_c : bruit de la mesure de code



Equation d'observation de la mesure de phase

$$\Phi = (\Phi(t_{\text{rec}}) - \Phi(t_{\text{eme}})) + \sigma_p + N \quad \text{Ambiguïté entière}$$

phase du signal générée par
l'oscillateur du récepteur à la
date de réception du signal

phase du signal générée par
l'oscillateur de l'émetteur à la
date d'émission du signal.

Décalages des horloges par rapport à une horloge de référence : $t = t_G + \delta$

Au premier ordre : $\Phi(t) = \Phi(t_G) + f\delta$

Soit : $\Phi = \Phi(t_{\text{Grec}}) - \Phi(t_{\text{Geme}}) + f(\delta_{\text{rec}} - \delta_{\text{eme}}) + \sigma_p + N$

$$\Phi = f\tau + f(\delta_{\text{rec}} - \delta_{\text{eme}}) + \sigma_p + N$$

Ou en multipliant par la longueur d'onde :

$$L = \lambda\Phi = c\tau + c(\delta_{\text{rec}} - \delta_{\text{eme}}) + \lambda N + \lambda\sigma_p$$

τ : temps de trajet du signal GPS entre l'émetteur et le récepteur

f : fréquence nominale du signal

σ_p : bruit de la mesure de phase

λ : longueur d'onde nominale = c/f

N : ambiguïté entière

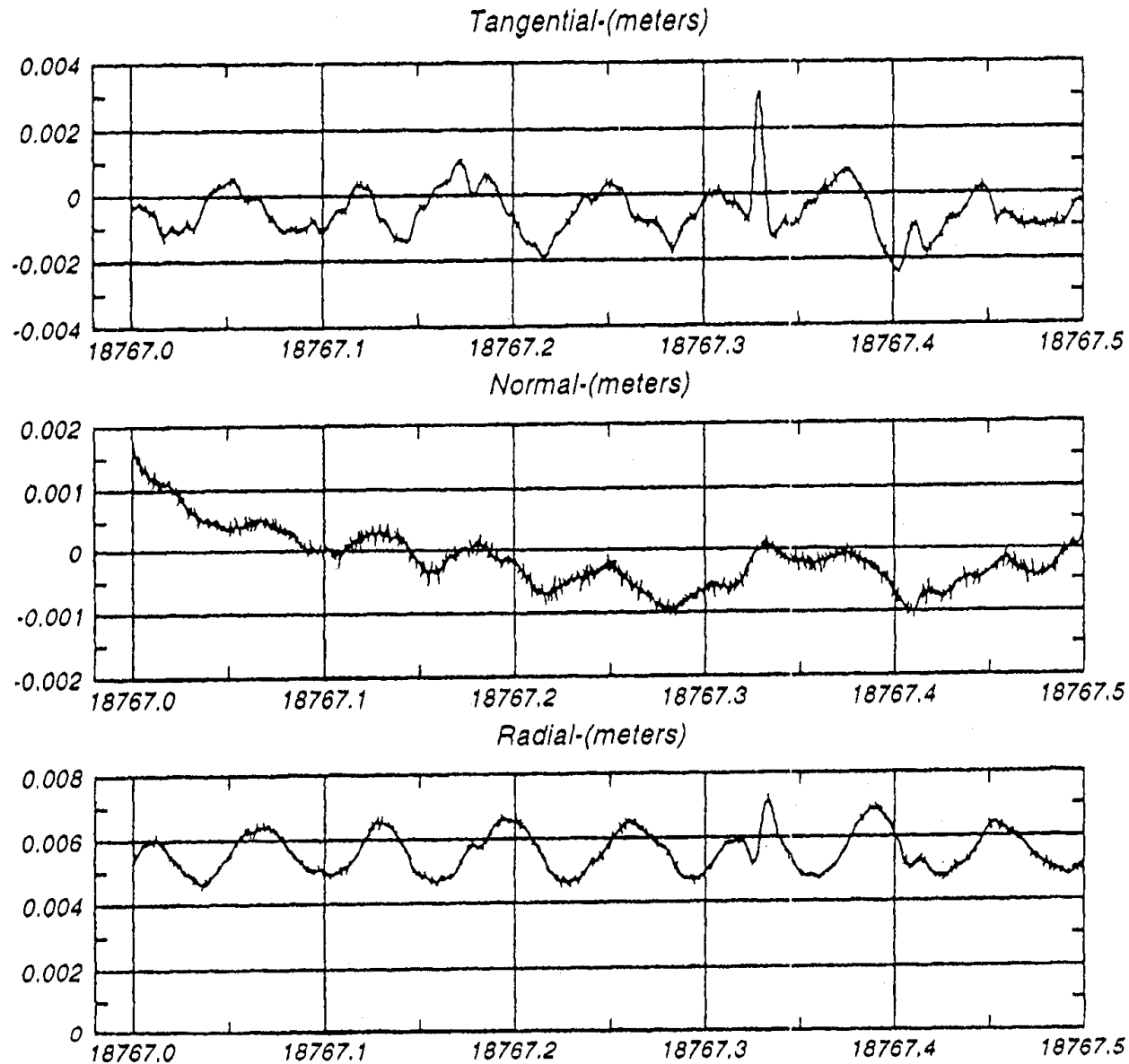
Equation du temps de trajet d'un signal



$\tau_e =$	$+ \tau_{0e}$	$+ I_0/f^2$	$+ T_e$
temps trajet	temps trajet dans le vide	retard ionosphérique ou avance de phase (premier ordre)	retard troposphérique

Pour le calcul précis de τ_{0e} , on prend en compte :

- les décalages des centres de phase
- les positions de l'émetteur (à la date d'émission) et du récepteur (à la date de réception)
- la courbure du trajet (effet relativiste)



Effet de l'oubli de la correction de courbure du trajet sur une restitution d'orbite de CHAMP



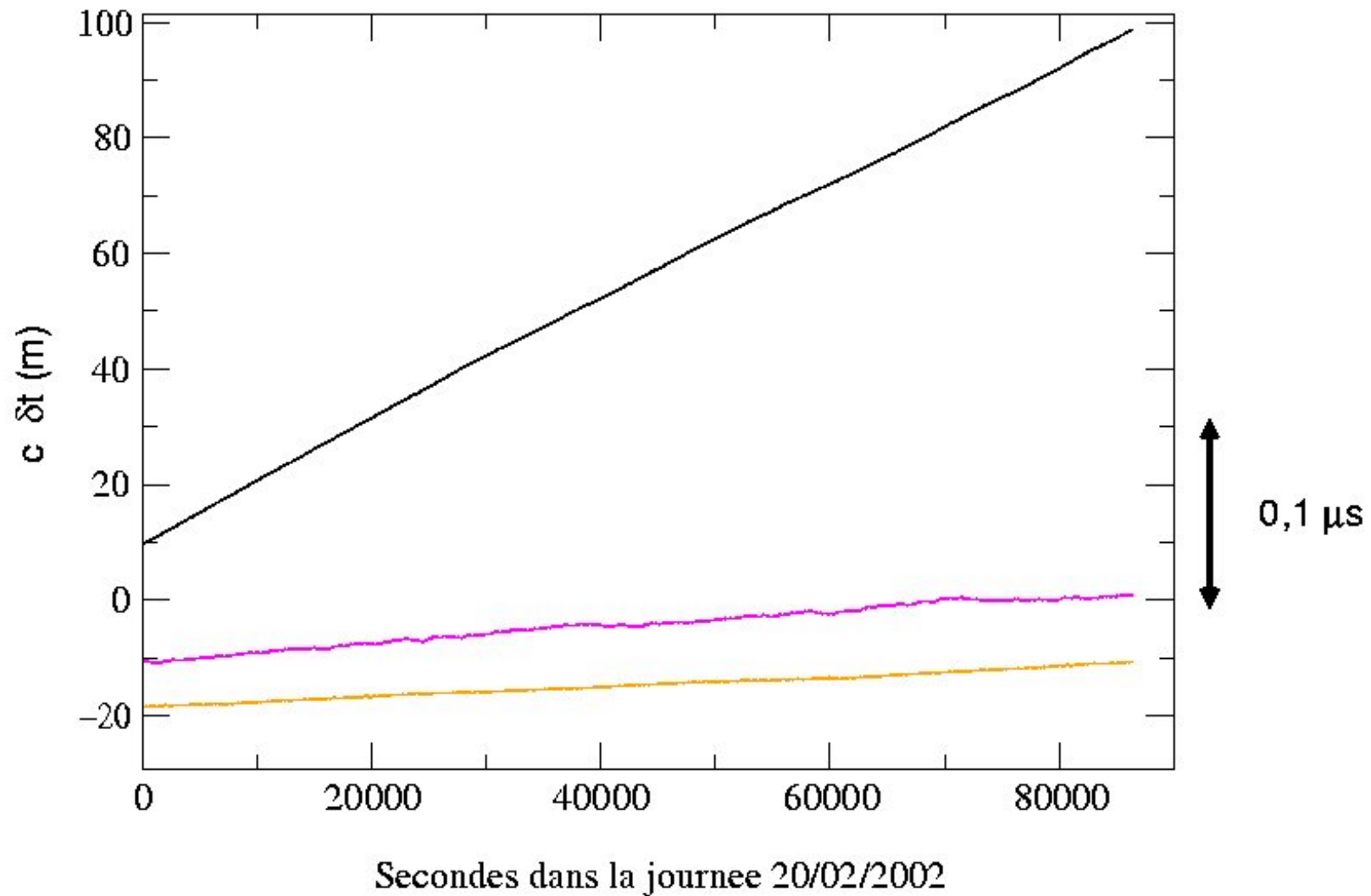
Mesures disponibles à chaque date et pour chaque récepteur

- Pseudo distances (bruitées mais non biaisées) et Phases (peu bruitées mais biaisées)
- Multicanal (8 à 12 canaux suivant les récepteurs) :
 - ➔ mesures à partir des signaux émis de plusieurs satellites (indice e)
- Bi-fréquence : ➔ mesures simultanées sur les deux fréquences (L_1 et L_2)

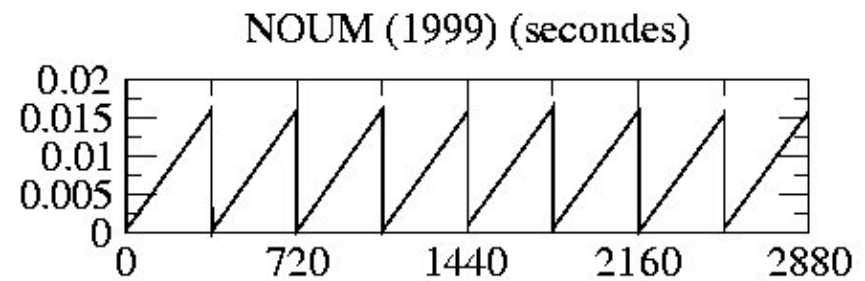
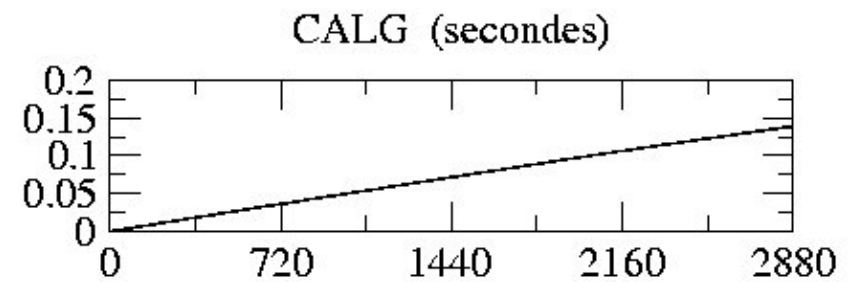
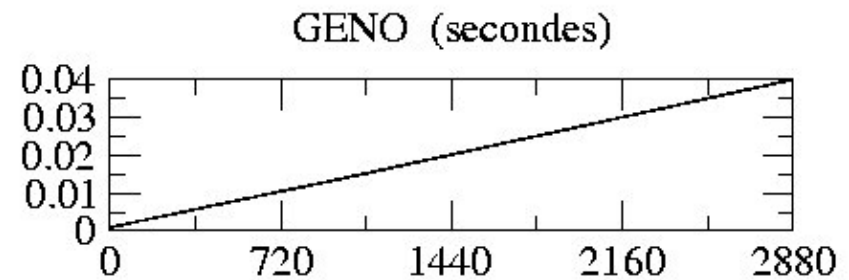
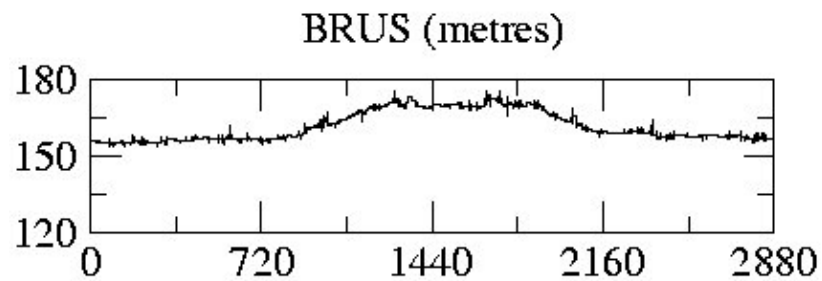
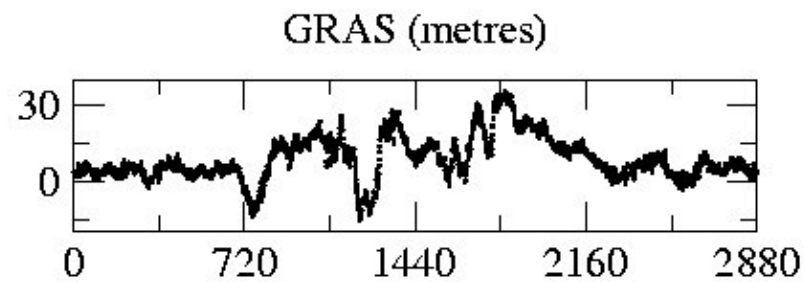
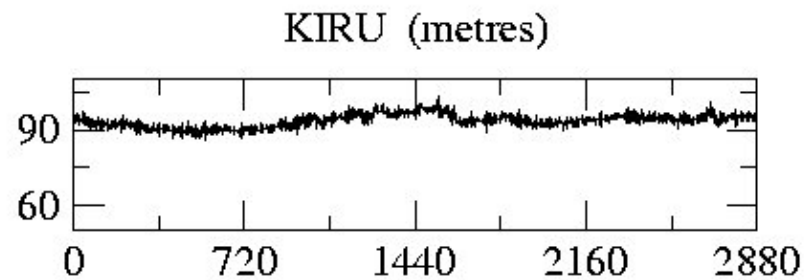
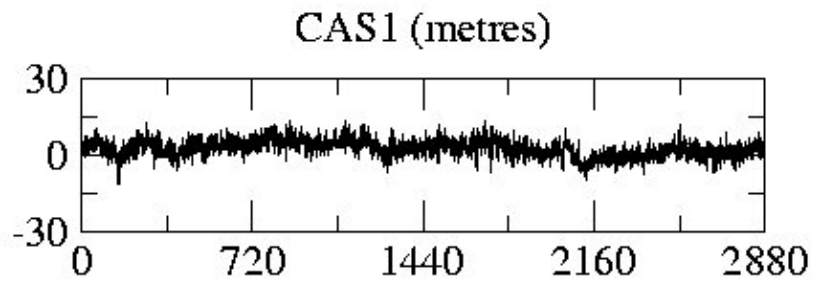
Mesures disponibles pour chaque satellite GPS observé à une date donnée :

$$\begin{aligned} P_1 &= c \tau_{0e} + I_e + T_e + c(\delta_r - \delta_e) + \sigma_{c1} \\ P_2 &= c \tau_{0e} + (f_1^2 / f_2^2) I_e + T_e + c(\delta_r - \delta_e) + \sigma_{c2} \\ L_{1e} &= c \tau_{0e} - I_e + T_e + c(\delta_r - \delta_e) + \lambda_1 N_{1e} + \sigma_{p1} \\ L_{2e} &= c \tau_{0e} - (f_1^2 / f_2^2) I_e + T_e + c(\delta_r - \delta_e) + \lambda_2 N_{2e} + \sigma_{p2} \end{aligned}$$

Exemples d'horloges GPS (satellites 5, 6 et 22)

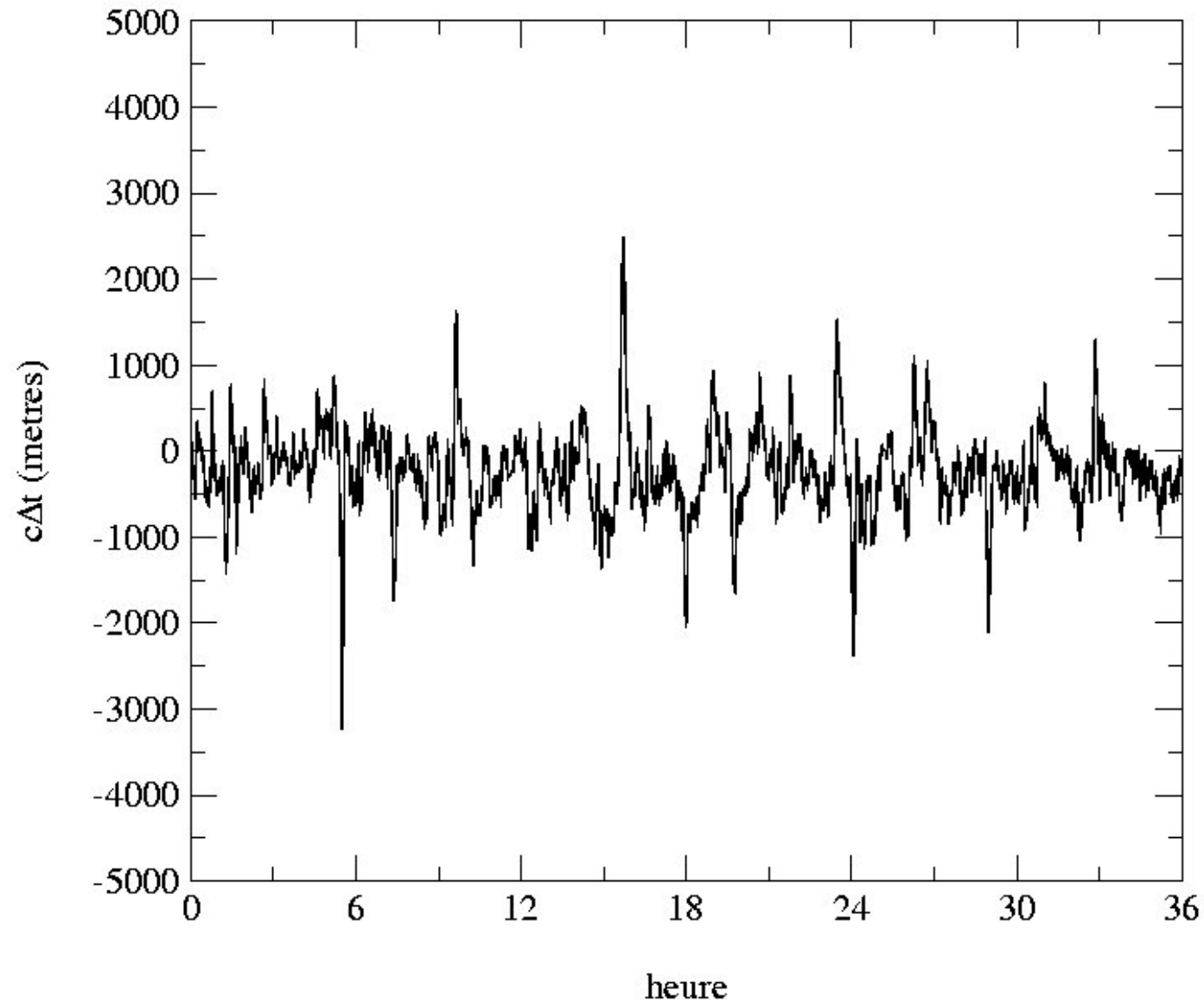


EXEMPLES d'HORLOGES STATIONS



exemple : horloge du recepteur embarque de CHAMP

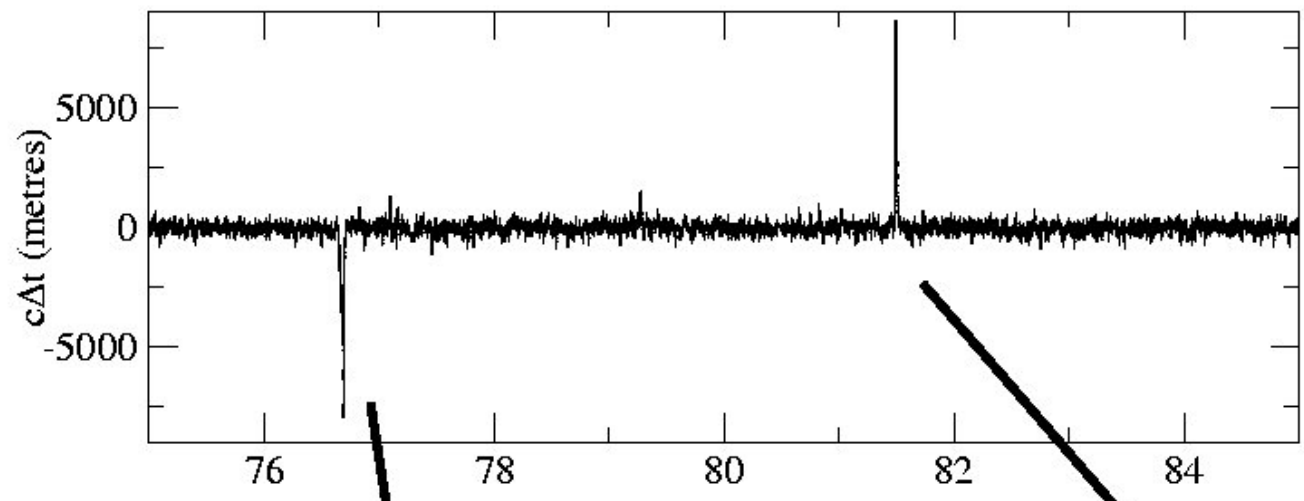
(horloge calée sur le temps GPS)



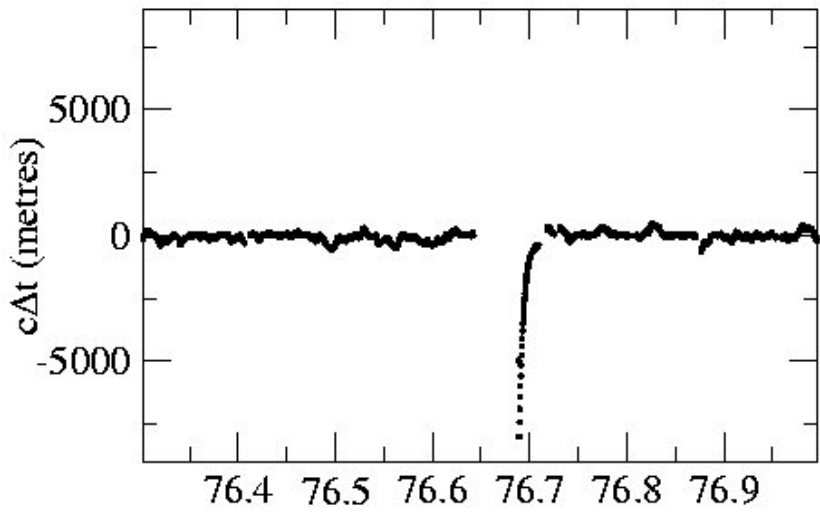
Ecole d'été GRGS (septembre 2002)



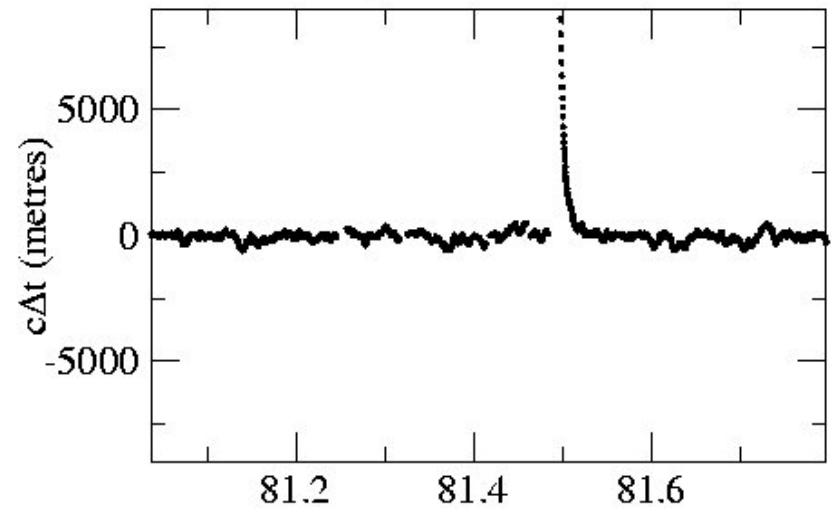
Horloge du recepteur GPS embarque sur JASON



jour de l'annee 2002



jour de l'annee 2002



jour de l'annee 2002



Conditions pour résoudre les paramètres de mesure

Le traitement global conduit à un **problème linéaire faiblement déterminé...**

Conséquences :

- Un nombre important de récepteurs et de mesures est nécessaire pour résoudre les paramètres d'horloge des satellites hauts (**réseau minimal**).
- de faibles résidus de mesure après ajustement des paramètres peuvent indiquer une bonne solution ... ou bien un réseau trop petit !!
- une mesure aberrante ou une mauvaise modélisation introduit des erreurs qui se répartissent sur l'ensemble des paramètres du réseau.

Simultanéité des mesures :

Le paramètre d'horloge émetteur n'est commun que si les mesures des récepteurs différents sont simultanées. (voir annexes)

Passages longs pour les ambiguïtés : dans la pratique on prend des passages supérieurs à quelques dizaines de mesures...

Non-unicité de la solution pour les paramètres d'horloges :

/!\ GPS est une technique différentielle : $(\delta_r - \delta_e) = (\delta_r + X - (\delta_e + X))$

→ Besoin d'une **horloge de référence** pour résoudre les paramètres d'horloges



Mesures GPS (quelques « grands » chiffres)

Paramètres	nouveau paramètre pour :	fréquence	Nombre typique par jour et par récepteur	Nb typique pour une journée de traitement global (80 stations + 27 satellites GPS)
Ambiguïtés récepteur sol	- nouveau passage en visibilité	2-3/jour/récepteur et par canal	55-80	5000
Ambiguïtés récepteur embarqué	- perte de phase sur une des fréquences	1/révolution et par satellite GPS	350	350
Horloges	nouvelle époque	1/époque/récepteur et par émetteur	280 (données à 300 sec.) 2880 (données à 30 sec.)	22400 (300 sec.) 224000 (30 sec.)
Paramètres de troposphère	dépend de la dynamique de l'atmosphère	1/qqs heures et par station	12	1000
Nombre de mesures		4-8/récepteur et par époque	1800(300 sec.) 18000 (30 sec.)	140 000 (300 sec.) 1 400 000 (30 sec.)

Plusieurs dizaines de milliers de paramètres par jour pour des centaines de milliers de mesures... !

Diminuer la taille du système ...

Techniques de différentiations des mesures : (permettent de diminuer le nombre de mesures et de paramètres)

-simples ou doubles différences pour les horloges

- triples différences pour les ambiguïtés

Techniques d'inversion adaptées : (permettent de diminuer le temps de calcul)

- résolution par blocs

Séparation des traitements : (CHAMP/GRACE/GOCE)

- restitution des orbites hautes et des horloges

puis du ou des satellites bas dans un deuxième temps

Combinaisons de mesures (entre différents observables)

Le nombre important de mesures permet de réaliser des combinaisons linéaires variées et utiles pour les traitements et/ou les pré traitements :

$$L = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$$

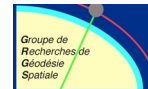
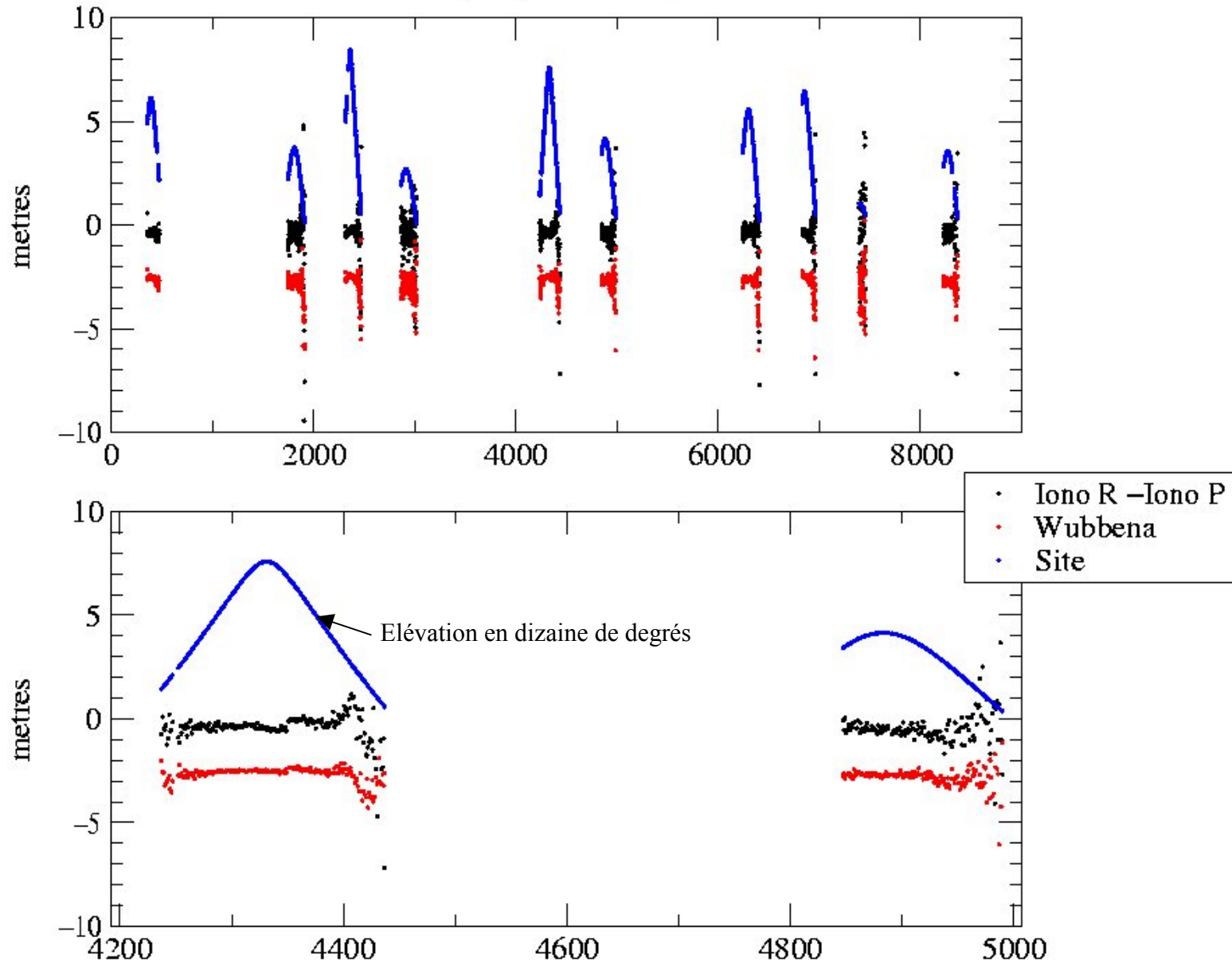
Combinaison	intérêt	α_1	α_2	Bruit/ σ_p	Ionosphere/ I_e
Ionosphère free	élimine ionosphère	$f_1^2 / (f_1^2 - f_2^2)$	$-f_2^2 / (f_1^2 - f_2^2)$	3	0
Geometry-free	élimine géométrie horloges troposphère	1	-1	1,4	0,6
Wide-lane	utilisée pour la détection des sauts de cycles	$f_1 / (f_1 - f_2)$	$-f_2 / (f_1 - f_2)$	5	1,3

- La combinaison Melbourne-Wubben (Pseudo-distance et Phase) élimine ionosphère, géométrie, horloges et troposphère.

MB = Wide-Lane (Phase) - Wide-Lane (Pseudo-distance)

Exemples...

champ day 222/2000 pm23



Combinaisons de mesures (entre différents récepteurs)

Mesure non-différentiée : $L_{ri} = c \tau_{ri} + c (\delta_r - \delta_i) + \lambda N_{ri}$
(indices i,j,... pour les satellites et r,s... pour les stations)

Simple différences entre deux récepteurs : élimine les horloges hautes

$$L_{ri} - L_{si} = c(\tau_{ri} - \tau_{si}) + c(\delta_r - \delta_s) + \lambda(N_{ri} - N_{si})$$

Doubles différences : élimine les horloges

$$DD_{rsij} = L_{ri} - L_{si} - (L_{rj} - L_{sj}) = c(\tau_{ri} - \tau_{si} - \tau_{rj} + \tau_{sj}) + \lambda(N_{ri} - N_{si} - N_{rj} + N_{sj})$$

Triples différences entre deux époques successives : élimine les ambiguïtés

$$T_{rsij} = DD_{rsij}(t_{n+1}) - DD_{rsij}(t_n) = c(\tau_{ri} - \tau_{si} - \tau_{rj} + \tau_{sj})_{n+1} - c(\tau_{ri} - \tau_{si} - \tau_{rj} + \tau_{sj})_n$$

Méthode de résolution par blocs

(Mesures non-différentiées)

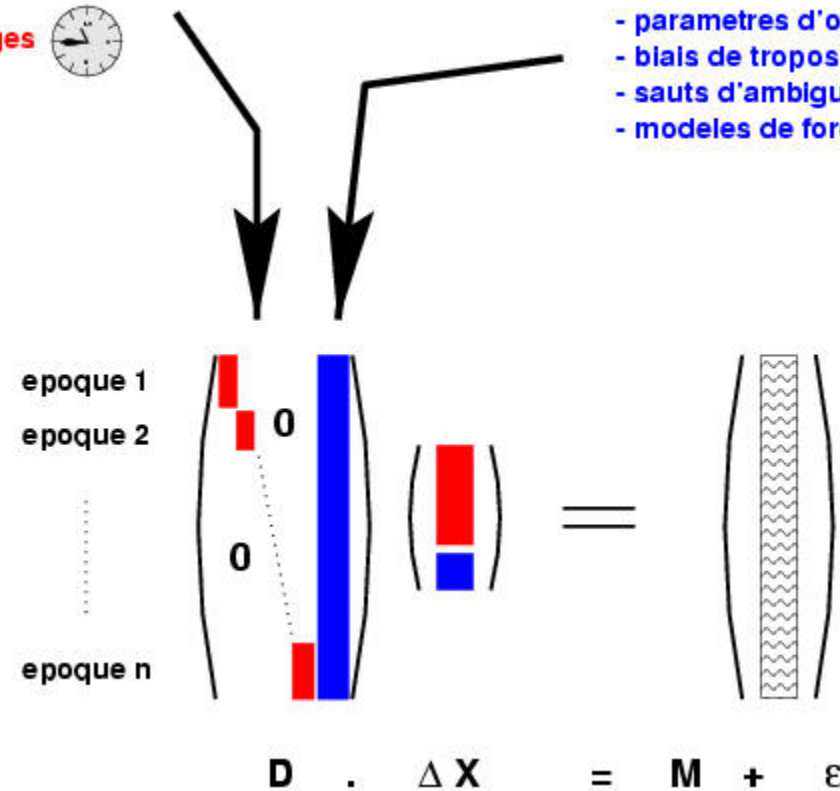
paramètres locaux

- horloges



paramètres globaux

- paramètres d'orbite
- biais de troposphère
- sauts d'ambiguités
- modèles de force



Résolution des ambiguïtés entières

Méthode (aperçu) :

- solution pour les ambiguïtés réelles
- puis méthodes itératives avec résolution pas à pas des ambiguïtés en utilisant les contraintes apportées par la combinaison Wide-Lane :

$$\mathbf{L}_{WL} = \mathbf{C} \boldsymbol{\tau} + \lambda_{WL} (\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2) \quad (\lambda_{WL} = \mathbf{c}/(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) = 86 \text{ cm})$$

→ besoin de revenir aux observables élémentaires.

Fixer les ambiguïtés à des valeurs entières :

- améliore les solutions

mais :

- surtout possible sur des bases courtes (réseaux denses)
- coûteux en temps de calcul
- difficile à mettre en œuvre (algorithmes, transport des observables élémentaires...)

Avantages / Inconvénients des différentes stratégies de traitement

Différentes options	Avantage(s) majeur(s)	Inconvénient(s) majeur(s)
Traitement global Satellites GPS + stations sol + satellite(s) bas	<ul style="list-style-type: none"> • Unité du traitement 	<ul style="list-style-type: none"> • Taille du système à traiter • Temps de calcul • Il faut tout recommencer à chaque fois...
Traitement séparé : orbites et horloges hautes satellites bas	<ul style="list-style-type: none"> • Travail par étapes • Possibilité de partager le travail entre différents centres 	<ul style="list-style-type: none"> • Unicité du système de référence ? • Besoin de calculer et de conserver les horloges hautes
Différentiation - doubles différences - triples différences	<ul style="list-style-type: none"> • Taille du problème réduit 	<ul style="list-style-type: none"> • Etape supplémentaire de formation des doubles différences. • Besoin de gérer les corrélations entre les mesures. • Peu compatible avec traitement séparé

→ **Pas de solution magique : plutôt un déplacement des problèmes...**

Annexes :

GPS : quelques définitions

Paramètres d'horloges : les biais d'horloge apparaissant dans les équations d'observation

Paramètres d'ambiguïtés: les valeurs des ambiguïtés (réelles ou entières suivant les cas) apparaissant dans l'équation d'observation de la phase

Saut de phase ou saut de cycle (cycle slip) : discontinuité dans les mesures de phase due à la perte du signal par le récepteur sur une ou les deux fréquences observées.

Passage : l'ensemble des mesures comprises entre deux sauts de phase pour un satellite et un récepteur donné

époque GPS = une date de mesure commune à tous les récepteurs (ex : il y a 2880 époques/jour pour un échantillonnage de 30 sec.)

satellites hauts : l'ensemble des satellites GPS (28 à ce jour)

satellites bas (ou LEO : Low Earth Orbiters) : les satellites orbitant entre 350 et 2000 km embarquant éventuellement un récepteur GPS et/ou d'autres instruments de mesure.

Simple différences : différences entre 2 mesures effectuées à la même date par le même récepteur ou entre 2 mesures sur des signaux issus du même satellite.



Doubles différences : différences entre 2 simples différences.

Triples différences : différences entre deux doubles pour deux époques successives.

Valeur des fréquences des signaux GPS

$$f_0 = 10,23 \text{ MHz}$$

$$f_1 = 154 f_0 = 1575,42 \text{ MHz } (\lambda_1 \sim 19 \text{ cm})$$

$$f_2 = 120 f_0 = 1227,60 \text{ MHz } (\lambda_2 \sim 24,4 \text{ cm})$$

GPS : un problème forcément gros et peu sur-déterminé...

On suppose que l'on a uniquement les paramètres d'horloge à résoudre (stations et satellites).

Combien faut-il de stations pour avoir une moyenne de 3 mesures par paramètre ?

Si $m=27$ satellites GPS et que l'on a n récepteurs, on obtient :

- environ $6*n$ mesures/époque (6 satellites GPS en visibilité de chaque récepteur : cas optimal)
- $m+n$ paramètres horloges par époque

Le rapport entre le nombre de mesures indépendantes et le nombre de paramètres est donc $R=6*n/(m+n)$

Pour $m = 27$ $R > 3$ implique un nombre de stations supérieur à 40

Remarque : dans ce cas $R_{\max} = 6...$

Une condition pour la simultanéité des mesures

Le paramètre d'horloge émetteur n'est commun que si les mesures des récepteurs différents sont simultanées.

avec :

t1 : date de mesure du récepteur 1

t2 : date de mesure du récepteur 2

c dδ/dt : vitesse de variation des décalages d'horloges

et en prenant comme vitesse maximum : $c d\delta/dt = 30$ cm/s (taux de variation rencontré en présence de SA), on obtient la condition :

$$t1-t2 * c d\delta/dt < 1 \text{ mm} \quad \text{soit} \quad t1-t2 < 3,3 \mu\text{s}$$

0.1 Méthode d'inversion et de résolution par blocs:

Le traitement des mesures GPS non différenciées implique de résoudre les paramètres d'horloge à chaque époque de mesure. Le présent document décrit la méthode de résolution utilisée pour la détermination de ces paramètres d'horloge.

0.1.1 Définitions

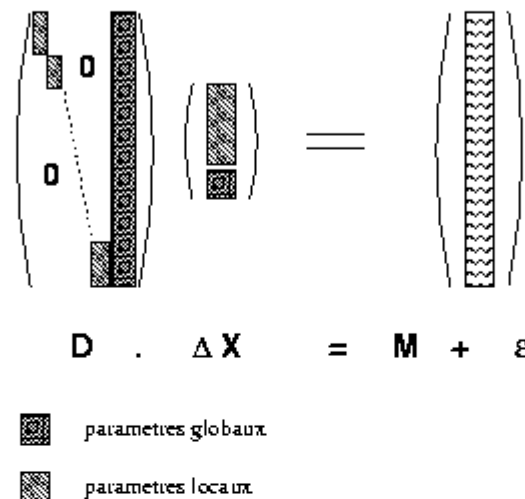


FIG. 1: Représentation schématique des équations d'observations. D est la matrice des dérivées partielles, où l'on a distingué les dérivées partielles associées aux paramètres locaux de celles concernant les paramètres globaux, ΔX est le vecteur des paramètres à résoudre et enfin $(M + \epsilon)$ est le vecteur des résidus d'observations.

Une époque est définie par un sous ensemble du jeu de mesure. Les paramètres que l'on cherche à résoudre seront séparés en deux groupes : les **paramètres globaux** d'une part, qui participent a priori à la modélisation de l'ensemble des mesures, et les **paramètres locaux** d'autre part qui participent uniquement à la modélisation d'un sous ensemble du jeu de mesure. À chaque sous ensemble de mesures de ce type (ou époque), on associe ainsi un sous ensemble de paramètres locaux de tel manière que les équations d'observation puissent se mettre sous la forme donnée par la figure 1.

0.1.2 Résolution par blocs

Dans le cas des observations GPS non différenciées, le nombre de paramètres locaux (biais d'horloge à chaque époque de mesures) est tel (voir tableau 1) que la méthode de résolution classique par inversion de la matrice normale complète devient pénalisante. La matrice des dérivées partielles D (cf figure 1) peut être décomposée en blocs correspondants à chacune des époques considérées (allant de 1 à p). On l'écrira, on notant D_{ti}

	exemple 1	exemple 2	exemple 3
Durée totale (1 arc)	86400 sec	86400 sec	86400 sec
Intervalle entre deux époques	300 sec	300 sec	30 sec
nb satellites	24	12	27
nb stations	40	20	30
nb époques	$(86400/300) = 288$	288	2880
nb paramètres d'horloge	$288 \times 64 = 18432$	$288 \times 32 = 9216$	164160
nb de mesures (\simeq)	48000	12000	$\simeq 1000000$

TAB. 1: Exemples de valeurs des différents paramètres dans le traitement de mesures GPS non-différentiées.

(resp. E_i) les blocs correspondant aux paramètres locaux (resp. globaux) :

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} D_{l1} & & 0 & E_1 \\ & D_{l2} & & E_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & D_{lp} \\ & & & E_p \end{array} \right) \quad (1)$$

La méthode des moindres carrés permet de résoudre le système présenté sur la figure 1. La solution s'obtient, si le système est convenablement conditionné, par :

$$\Delta X = (D^t \pi D)^{-1} D^t \pi M \quad (2)$$

où l'on a introduit la matrice π représentant les incertitudes et corrélations associées aux mesures. La résolution du système (2) implique l'inversion de la matrice normale ($D^t \pi D$). Si on écrit D sous la forme donnée par l'équation (1), la matrice normale prend la forme particulière suivante :

$$D^t \pi D = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & & 0 & X_1^t \\ & A_2 & & X_2^t \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & A_p \\ \hline X_1 & X_2 & \cdots & X_p \end{array} \right) \quad (3)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_i &= D_{li}^t \pi_i D_{li} & \text{pour } i = 1 \text{ à } p \\ X_i &= E_i^t \pi_i D_{li} & \text{pour } i = 1 \text{ à } p \end{aligned} \quad (4)$$

$$B = \sum_{i=1}^p E_i^t \pi_i E_i$$

Pour la suite, on introduit les notations supplémentaires :

$$D_i^t = (D_{l1}^t \ D_{l2}^t \ \cdots \ D_{lp}^t) \quad (5)$$



$$E^t = (E_1^t E_2^t \dots E_p^t) \quad (6)$$

$$X = (X_1 X_2 \dots X_p) \quad (7)$$

$$\text{et } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_p^{-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

À chaque époque correspond une matrice A_i de taille $(n_i \times n_i)$ où n_i est le nombre de paramètres locaux par époque. La taille de la matrice B est $(n_g \times n_g)$ où n_g est le nombre de paramètres globaux. La partie située en haut et à gauche est bloc-diagonale. La matrice donnée par l'équation (3) peut s'inverser par blocs. Ce calcul est rappelé à l'annexe I, et on obtient :

$$(D^t \pi D)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1} X^t K^{-1} X A^{-1} & -A^{-1} X^t K^{-1} \\ \hline -K^{-1} X A^{-1} & K^{-1} \end{array} \right) \quad (9)$$

où $K = B - X A^{-1} X^t$ qui peut encore s'écrire, en se servant des relations (4) :

$$K = \sum_{i=1}^p (E_i^t \pi_i E_i - E_i^t \pi_i D_{i1} A_i^{-1} D_{i1}^t \pi_i E_i) \quad (10)$$

L'intérêt d'une telle méthode est le nombre de calculs restreints qu'elle comporte par rapport à l'inversion d'une matrice monobloc de même taille. Dans le cas présenté ici, l'inversion proprement dite ne nécessite "que" l'inversion des blocs A_i et du bloc K . Un algorithme de calcul époques par époques se dégage des relations (9) et (10). Cet algorithme sera décrit après la présentation des formules associées aux solutions.

0.1.3 Solutions

La solution du système d'équations présenté figure 1 est donnée par l'équation (2). Si on sépare le vecteur solution en deux parties selon :

$$\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta X_{\text{locaux}} \\ \Delta X_{\text{globaux}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

on obtient, pour les paramètres globaux :

$$\Delta X_{\text{globaux}} = K^{-1} E^t (\pi - \pi D_i A_i^{-1} D_i^t \pi) M \quad (12)$$

avec les notations données par les relations (8) à (5).

La solution pour les paramètres locaux est donnée par :

$$\Delta X_{\text{locaux}} = (A^{-1} + A^{-1} X^t K^{-1} X A^{-1}) D_i^t \pi M - A^{-1} X^t K^{-1} E^t \pi M \quad (13)$$



ou, en se servant de l'équation (12) :

$$\Delta X_{local} = A^{-1} D_i^t \pi (M - E X_{global}) \quad (14)$$

On peut enfin réécrire cette dernière équation en décomposant les époques :

$$X_{local,i} = A_i^{-1} D_{i_i}^t \pi_i (M_i - E_i X_{global}) \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } p \quad (15)$$

C'est cette dernière équation qui a été retenue pour la résolution des paramètres locaux.

0.1.4 Gestion des équations d'observation ne dépendant pas des paramètres locaux

Ce cas de figure se présente quand on combine des mesures GPS non différenciées avec des mesures d'un autre type (laser,éphémérides,doris...etc). Les dérivées partielles de ces mesures par rapport aux biais d'horloges GPS sont évidemment nulles et les équations d'observations peuvent se mettre sous la forme décrite par la figure 2. Pour garder le classement temporel des mesures, les blocs sont maintenant séparés par des lignes où les coefficients de la partie gauche de la matrice D sont nuls. Cette structure particulière ne présente pas de problèmes particuliers et on peut appliquer la méthode précédente à condition de tenir compte des "trous" pour les produits entre D et E (équations (4) ou (10) et (14)).

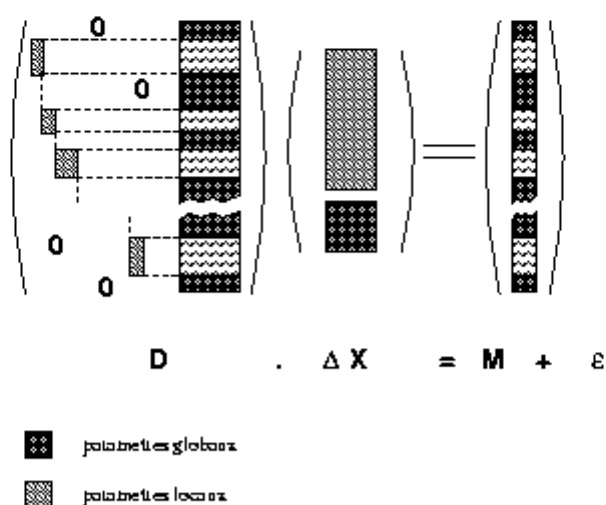


FIG. 2: Représentation schématisée des équations d'observations dans le cas où on combine différents type de mesures. D est la matrice des dérivées partielles, où l'on a distingué les dérivées partielles associées aux paramètres locaux de celles concernant les paramètres globaux, ΔX est le vecteur des paramètres à résoudre et enfin $(M + \epsilon)$ est le vecteur des résidus d'observations.

0.1. MÉTHODE D'INVERSION ET DE RÉOLUTION PAR BLOCS:

Annexe I

On cherche ici l'inverse de la matrice :

$$N = (D^t \pi D) = \left(\begin{array}{c|c} A & X^t \\ \hline X & B \end{array} \right)$$

Si A est inversible, on peut réécrire N selon :

$$N = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline XA^{-1} & I \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B - XA^{-1}X^t \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1}X^t \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

qui s'inverse maintenant immédiatement selon :

$$N^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I & -A^{-1}X^t \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & K^{-1} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -XA^{-1} & I \end{array} \right)$$

avec $K = B - XA^{-1}X^t$.

On obtient finalement :

$$N^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}X^tK^{-1}XA^{-1} & -A^{-1}X^tK^{-1} \\ \hline -K^{-1}XA^{-1} & K^{-1} \end{array} \right)$$