Equations pour les mesures gradiométriques (GOCE)

G. Balmino , CNES-GRGS

Ecole d' été du GRGS
« Détermination du champ de gravité terrestre par les nouvelles missions spatiales »

Forcalquier, 2-6 Septembre 2002

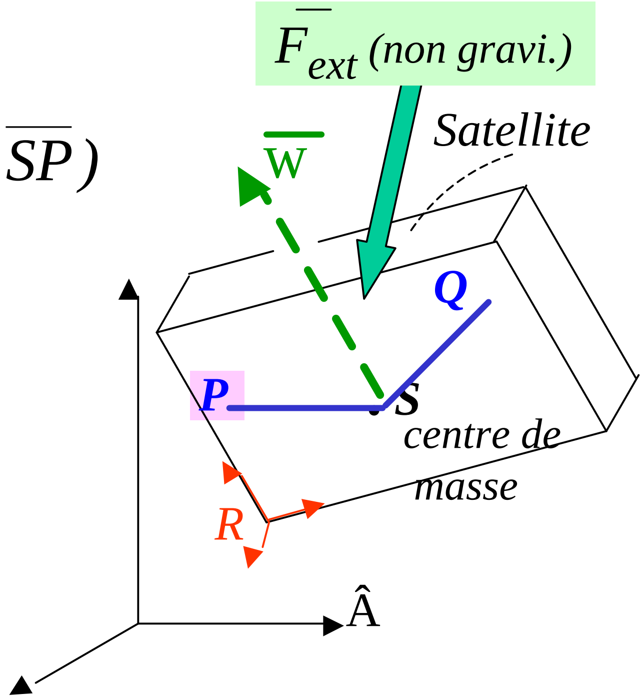
CE QUE MESURE UN GRADIOMETRE

<u>Rappel</u> (cf. cours de P. Touboul)

$$\left(\ddot{\overline{SP}}\right)_{\Re} = \underbrace{\left(\ddot{\overline{SP}}\right)_R}_{=0} + 2\,?\wedge\underbrace{\left(\dot{\overline{SP}}\right)_R}_{=0} + (\dot{?})_R\wedge\overline{SP} + ?\wedge(?\wedge\overline{SP})$$

$$= \nabla_P U - \nabla_S U + \frac{\bar{f}_{elect.}(P)}{m_P} - \frac{\bar{F}_{ext} - \sum \bar{f}_{elect.}}{M_{sat} - \sum m_P}$$

force électrostatique exercée par le satellite sur la masse d'épreuve m_P



On calcule et soustrait le "mode commun"

$*$ Un accéléromètre en P donne accès à :

$$\underbrace{\overline{w}_P}_{w_P} = \underbrace{\nabla_P U - \nabla_S U}_{\nabla^2{}_P\, U\,.\,SP} - \underbrace{\dot{\overline{w}}\wedge\overline{SP}}_{\dot{W}\,.\,SP} - \underbrace{\overline{w}\wedge(\overline{w}\wedge\overline{SP})}_{W\,.\,W\,.\,SP}$$

$$w_P = \nabla^2{}_P\, U\,.\,SP - \dot{W}\,.\,SP - W\,.\,W\,.\,SP$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$*$ De même, en Q :

$$w_Q = \nabla^2{}_Q\, U\,.\,SQ - \dot{W}\,.\,SQ - W\,.\,W\,.\,SQ$$

$$w_Q - w_P = \underbrace{[\tilde{N}\,{}^2{}_S\, U - (\dot{W} + W^2)]}_{L} \ . \ [PQ]$$

$$\nabla^2 U \quad \text{---} \quad : \text{sym.}$$

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} -w_2^2 - w_3^2 & w_1 w_2 & w_1 w_3 \\ w_2 w_1 & -w_3^2 - w_1^2 & w_2 w_3 \\ w_3 w_1 & w_3 w_2 & -w_1^2 - w_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{--------------} : \text{sym.}$$

$$\dot{\Omega} \quad \text{---} \quad : \text{anti-sym.}$$

$$\frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^T) = \nabla^2 U - \Omega^2$$

$$\frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^T) = -\dot{\Omega}$$

$$\Omega = \Omega_0 - 1/2 \int_{t_0}^{t} (\Lambda - \Lambda^T)\, dt$$

+ autres données d'attitude
(senseurs stellaires)

LES DIFFERENTES CONTRIBUTIONS A $\nabla^2 U$

- POTENTIEL DU CORPS CENTRAL (TERRE)

Partie statique (« moyenne »)

Variations temporelles :
1. marées terrestres
2. marées océaniques
3. pression atmospérique
4. humidité des sols, enneigement, ...

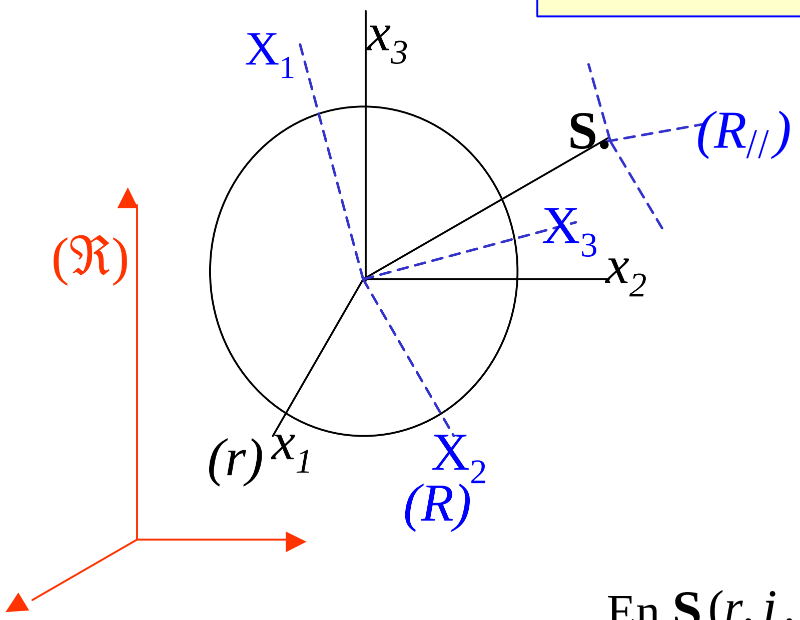
- POTENTIELS « 3.ème - CORPS »

Satellite(s) naturel(s) : Lune

Soleil

Planètes

CORPS CENTRAL



$(r) = \{x_i\}$: fixe/corps

$(R) = \{X_i\}$: repère du gradiomètre

X_1 : ~ *vecteur vitesse*

X_2 : ~ *normal* , X_3 : ~ *radial*

En **S** (r, j, l) / (r)

$$U = U_0 + \sum_{l>0} U_l$$

$$U_0 = GM / r$$

$$U_l = \frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r} \right)^l \sum_m K_{lm} Y_{lm}(j, l)$$

$$= \sum_m K_{lm} u_{lm}(r, j, l)$$

K_{lm}, Y_{lm} *norm.*

- Les mesures sont faites dans *(R)* : $U''_{ij} = \partial^2 U / \partial X_i \partial X_j$

- On ne mesure pas (bien) tout le tenseur $\nabla^2 U = (U''_{ij})$ **!**

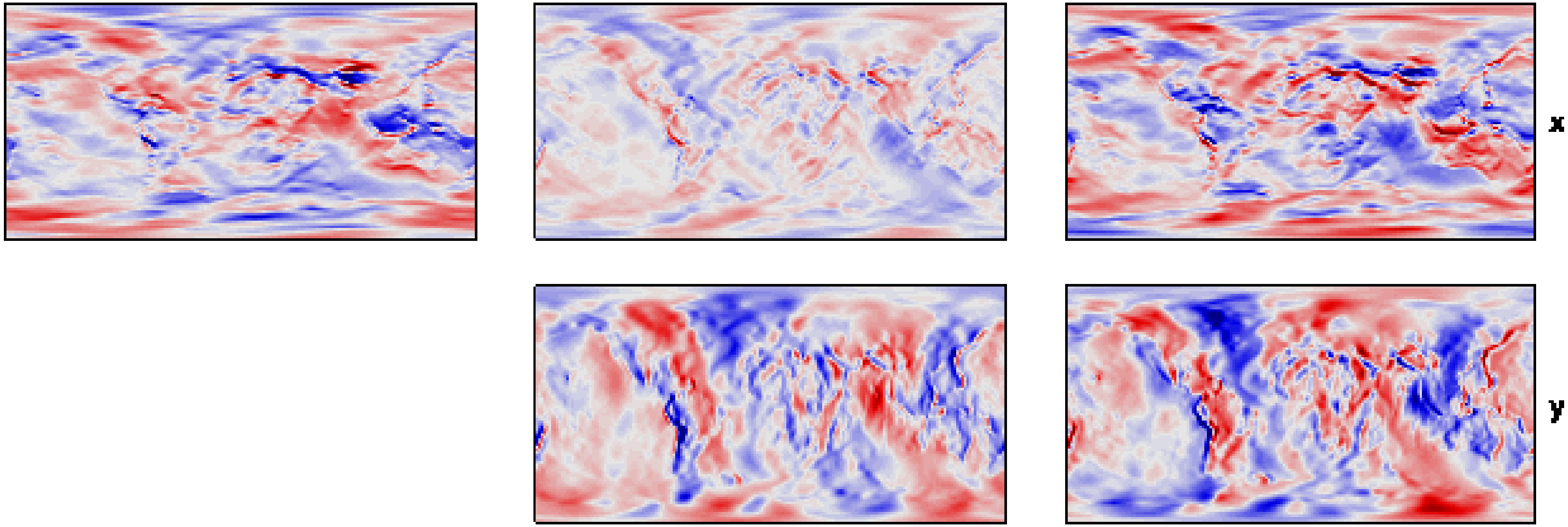
*Pour **GOCE** :* U''_{11}, U''_{22}, U''_{33} (*et peut-être* U''_{13})

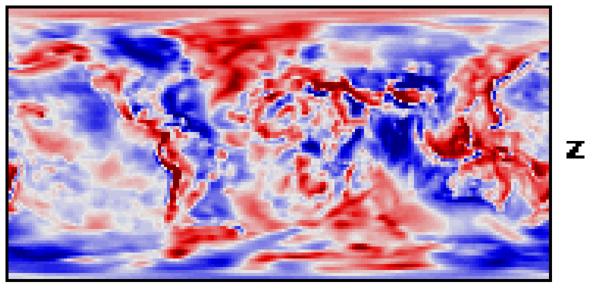
Autres termes pas assez précis

(*erreurs sur* ω, $\dot{\omega}$, ...)

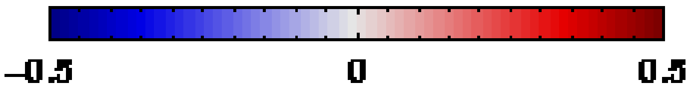
Les signatures du potentiel gravitationnel terrestre dans U''_{ij}

x = X_1 y = X_2 z = X_3





$U''_{ij} - W''_{ij}$ (Eötvös)



Par rapport aux W''_{ij} d 'un ellipsoide de référence dynamique

Si mesures parfaites : une seule composante suffit
En présence d 'erreurs de mesures : plusieurs composantes nécessaires

Si $\quad X = \boldsymbol{M}\ x \quad$, avec $\boldsymbol{M}^{T} = \boldsymbol{M}^{-1}$

on a :
$$(\nabla U)_{(R)} = \boldsymbol{M}\,(\nabla U)_{(r)}$$
$$(\nabla^2 U)_{(R)} = \boldsymbol{M}\,(\nabla^2 U)_{(r)}\,\boldsymbol{M}^{T}$$

→ il faut écrire l 'équation d 'observation dans (R)

→ Dans (R) :

$$\boxed{\begin{aligned} U''_{ij}(obs) - U''_{ij}(calc) &= \Sigma_{lm}\ (\partial U''_{ij} / \partial K_{lm})_{(R)}\ DK_{lm} \\ &= \Sigma_{lm}\ [\ \Sigma_{kn}\ \boldsymbol{M}_{ik}\ \underbrace{(\partial U''_{kn} / \partial K_{lm})_{(r)}}_{=\dfrac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_k\,\partial x_n}}\ \boldsymbol{M}_{jn}\ ]\ DK_{lm} \end{aligned}}$$

(*cf. planche* 5)

Principe du calcul des $\partial^2 u_{lm} / \partial x_k \partial x_n$

Formalisme : non singulier aux pôles (et aussi précis)
stable (précis) $\forall\, \varphi$, $\forall\, (l,m)$; (l,m : *grands, ~300 à 1000*)
rapide $\rightarrow$ récurrences

Bases :

$$Y_{lm}(\varphi,\lambda) = P_{lm}(\sin\varphi)\ \mathbf{e}^{\,\boldsymbol{i}\, m\lambda}$$

$$\theta_k = x_k / r \quad , \ \xi = \theta_1 \ , \ \eta = \theta_2$$

$$\xi + \boldsymbol{i}\,\eta = \cos\varphi\ \mathbf{e}^{\,\boldsymbol{i}\,\lambda}$$

$\rightarrow$ *récurrences pour* ξ^m , η^m *et dérivées /* λ

Relations de récurrence sur les polynômes d 'Helmholtz
H_{lm} et leurs dérivées,
avec : $P_{lm}(\sin\varphi) = \cos^m\varphi \ .\ H_{lm}(\sin\varphi)$
(sous forme normalisée)

→ *cf. cours de J.C. Marty , R. Biancale*

N.B.

1. $(\nabla^2 U_0)_{(R)}$ peut être traité à part

   On a directement $\nabla^2 U_{0,\, ij} = GM\,(3\, x_{ij} \,/\, r^{\,2} - d_{ij}) \,/\, r^{\,3}$

2. $\nabla^2 U$ est symétrique

3. U est harmonique à l 'extérieur des masses

   $\Leftrightarrow$ vérifie l 'équation de Laplace $\sum_i U''_{ii} = 0$

5 composantes indépendantes

4. U''_{ij} est (également) calculé dans les équations aux variations

VARIATIONS TEMPORELLES

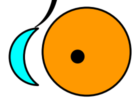
1. Marées terrestres

nombres de Love

Modèle de Terre
- *Elastique* : *sphérique* — k_l
- : *ellipsoidale* — $k_{lm}^{(0,\pm)}$
- *Anélastique* — *ellipsoidale* — $k_{lm}^{(0,\pm)} \in \mathbb{C}$

Corrections aux K_{lm} statiques :

(i) ------------ $$\Delta_1 K_{lm} = \frac{k_{lm}^0}{2l+1} \sum_{*} \frac{GM^*}{GM_T} \left(\frac{R}{r^*}\right)^{l+1} \tilde{Y}_{lm}^{\text{conj.}}\underbrace{(\Phi^*, \Lambda^*)}_{\text{dans } (r)}$$



+ termes indirects sur K_{4m} : $f\,(k^+_{2m})$ …………..(ellipticité)

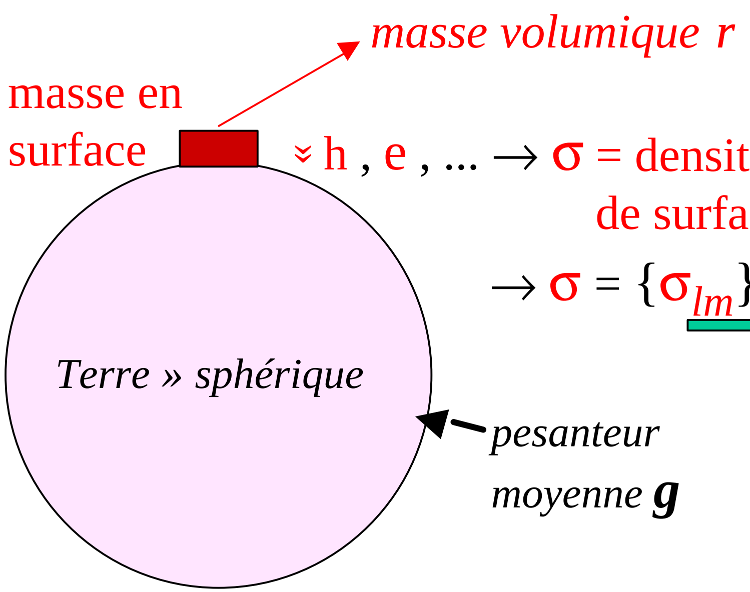
(ii) ------------ termes correctifs dépendant de la fréquence (temporelle)

$\Delta_2 K_{lm}$: *cf. "Standards" IERS ; Cours de J.C. Marty*
Cours de J.M. Lemoine, G. Ramilien

$$\boxed{\Delta K_{lm} = \Delta_1 K_{lm} + \Delta_2 K_{lm}}$$

VARIATIONS TEMPORELLES *(suite)*

Autres effets



h , e , ... $\rightarrow \sigma$ = densité de surface

$\rightarrow \sigma = \{\sigma_{lm}\}$

2. marées océaniques

pour chaque onde :

$h = \{h_{lm}\} \;\rightarrow\; \sigma_{lm} = \rho_{océan} \cdot h_{lm}$

3. pression atmosphérique

$p = \{p_{lm}\} \;\rightarrow\; \sigma_{lm} = p_{lm} / \boldsymbol{g}$

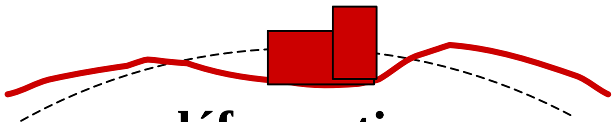
4. humidité des sols, enneigement, ...

$\varepsilon = \{\varepsilon_{lm}\}$: ***hauteur de matériau***

$\varepsilon_{equiv.\ eau} = \{\tilde{\varepsilon}_{lm}\} \rightarrow \sigma_{lm} = \rho_{eau} \cdot \tilde{\varepsilon}_{lm}$

$$\Delta U = \frac{G}{r} 4\pi R^2 \sum_{l,m} \left(\frac{R}{r}\right)^l \frac{1}{2l+1} \boxed{\sigma_{lm}} Y_{lm}(\varphi, \lambda) = \sum_l \Delta U_l$$

Attention !



déformation

$\longrightarrow \ldots + \underbrace{k'_l}_{\text{nombres de Love de charge}} \Delta U_l$

VARIATIONS TEMPORELLES *(fin)*

Donc, si l 'on écrit :

$$\Delta U = \frac{GM}{r} \sum_{l,m} \left(\frac{R}{r} \right)^{l} \Delta K_{lm} \, Y_{lm}(j \, , l \,)$$

alors :

$$\Delta K_{lm} = \frac{4p \; R^{2}}{M} \, \frac{1 + k'_{l}}{2l + 1} \, s_{\,lm}$$

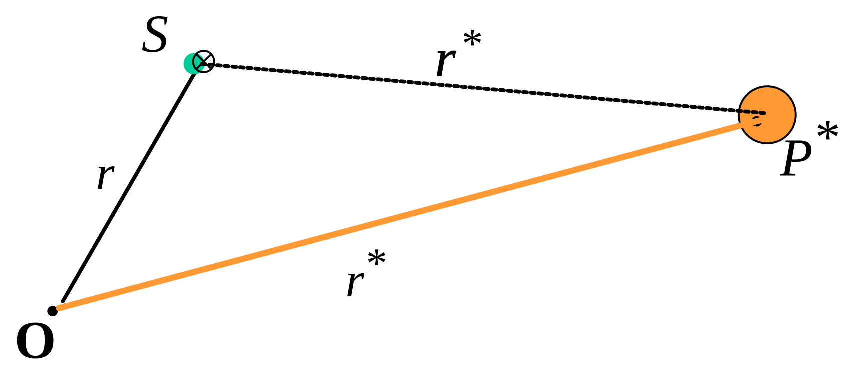
$$M = \frac{R^{2} g}{G}$$

$$\boxed{\Delta K_{lm} = 4p \; \frac{G}{g} \; \frac{1 + k'_{l}}{2l + 1} \; s_{\,lm}}$$

déterminables
(éventuellement)

CONTRIBUTIONS DE TYPE 3.ème CORPS

P^* | Lune, Soleil, Planètes



$$U_S^* = \sum_{P^*} GM^* \left(\frac{1}{r^*} - \frac{\bar{r}.\bar{r}^*}{r^{*3}} \right)$$

Dans le repère lié au corps, ou tout autre repère :

$$\bar{r} = (x_i)$$

$$\bar{r}^* = (x_i^*)$$

$$\boxed{U_{ij}^{*''} = \frac{GM^*}{r^{*3}} \left[3\,(x_i - x_i^*)\ (x_j - x_j^*) / \ r^{*2} - d_{ij} \right]}$$

FILTRAGE DES EQUATIONS GRADIOMETRIQUES

Problème* :** ***la précision des mesures de gradients de gravité par micro-accélérométrie différentielle, dépend de la fréquence

Pour GOCE , la précision est max. (et ~ constante) entre 0.005 et 0.1 Hz

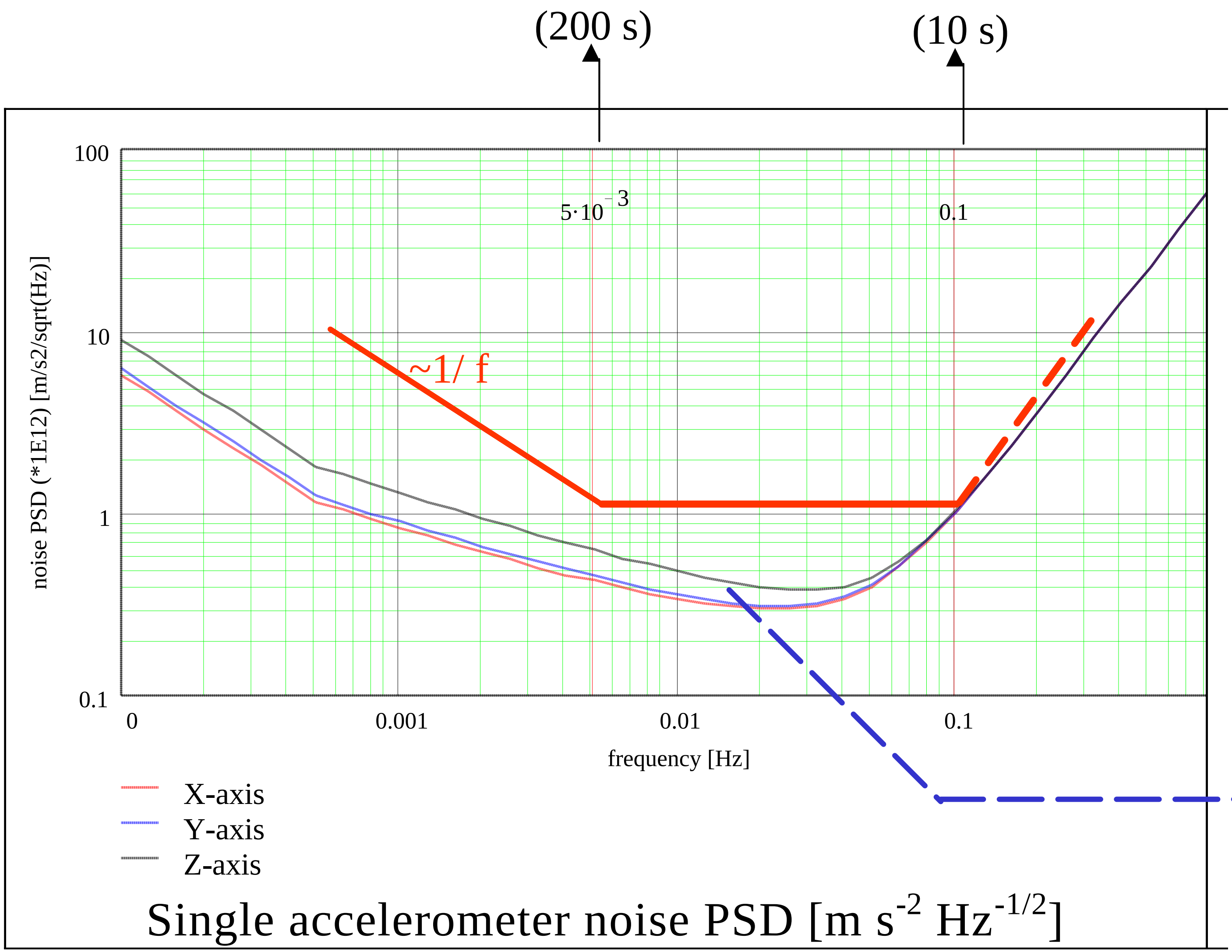
1500 km - 75 km

(cf. Cours de P. Touboul)

(i) Espérer étendre la précision à toutes les fréquences nécessaires par paramétrisation supplémentaire (en particulier à basse fréquence, en faisant confiance au SST-GPS , et/ou à l'aide d'un "très bon" modèle de référence à grandes longueurs d'ondes - par ex. issu de GRACE ...)

ou (ii) Filtrer les mesures (... et aussi les équations d 'observation) pour ne garder l 'information que dans la bande de fréquence ad 'hoc

GOCE : densité spectrale de bruit du gradiomètre



$\sigma_{gg} = \sqrt{2}\,\sigma_g / L$

Spécification initiale :

3 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$ entre 0.005 et 0.1 Hz (pour L = 0.5 m)

Performances prédites (à partir d 'analyses et de tests)

PSD : *Power Spectral Density* = **d**ensité **s**pectrale de **p**uissance du bruit (*h*)

$= \Im_{\omega}\{\text{f.a.c.}(h)\}$

transformée de Fourier

FILTRAGE DES EQUATIONS GRADIOMETRIQUES (aperçu et fin)

Equations d'observation initiales $\begin{cases} Ax = b \\ cov\,(b) = \Sigma = cov\,(h) \end{cases}$

$\Sigma := \Im^{-1}\{PSD_h(\omega)\}$: ses éléments sont fonction de l' intervalle de temps entre deux mesures, et de h

Soit F : filtre (opérateur linéaire) appliqué aux observations, et aux quantités théoriques et vecteurs colonnes de A

$$\begin{aligned} \bar{b} &= F\,b \\ \bar{A} &= F\,A \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{A}x = \bar{b} \\ cov\,(\bar{b}) = \bar{\Sigma} = E(\bar{b}\,\bar{b}^T) = F\,\Sigma\,F^T \end{cases}$$

Soit R le facteur de Cholesky de Σ, i.e. $\Sigma = R^T R$

$\Rightarrow$ si l'on prend $F = (R^{-1})^T$ alors : $\bar{\Sigma} = Id$.

→ *voir cours de G. Métris*


FIN
© 1997 F. Espenak