Les travaux scientifiques de Cholesky

C. Brezinski

Dans cet article, nous allons procéder à une description et à une analyse des différents manuscrits à caractère scientifique trouvés dans le Fonds A. Cholesky de l'École Polytechnique.

Le nom de Cholesky est passé à la postérité grâce à sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires. Elle est toujours intensément utilisée de nos jours et c'est donc pas elle que nous commencerons.

1 La méthode de Cholesky

La méthode de Cholesky est bien connue en analyse numérique. Soit à résoudre le système d'équations linéaires

$$Ax = b$$

où la matrice A est carrée, symétrique et définie positive. Cette méthode consiste à décomposer la matrice A en un produit $A = LL^T$ où L est une matrice triangulaire inférieure (c'est-à-dire dont tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls) dont les termes diagonaux sont strictement positifs. Le système devient alors $LL^Tx = b$. On pose $L^Tx = y$. On résout donc d'abord $Ly = b$ ce qui fournit le vecteur y. Puis on résout $L^Tx = y$. Les éléments de la matrice L s'obtient en identifiant les éléments correspondants dans les matrices A et LL^T.

1.1 Contexte historique

Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Mx = c$, où M est une matrice rectangulaire ayant m lignes et n colonnes. Si $m > n$ (c'est-à-dire quand il y a plus d'équations que d'inconnues), ce système n'a, en général, pas de solution x qui vérifie exactement les équations. On cherche alors à les résoudre *au mieux*. Pour cela, on considère le système carré d'équations $M^TMx = M^Tc$, appelées *équations normales*. La matrice $A = M^TM$ est symétrique définie positive, la solution x de ce système est unique et c'est le vecteur qui minimise $\|b - Ax\|_2$ où $b = M^Tc$. C'est la solution *au sens des moindres carrés* du système. Cette solution est liée à la réduction des formes quadratiques, sujet du premier article contenu dans les *Œuvres Complètes* de Joseph Louis Lagrange (Turin, 30 janvier 1736 - Paris, 10 avril 1813) et qui date de 1759. À cette occasion, Lagrange donne des formules d'élimination semblables à celles de la méthode de Gauss dont nous parlerons plus loin. Il semble que l'interprétation matricielle de cette méthode de réduction soit due à Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam, 10 décembre 1804 - Berlin, 18 février 1851) dans un article posthume de 1857 [32].

La méthode des moindres carrés fut publiée pour la première fois par Adrien Marie Legendre (Paris, 18 septembre 1752 - Paris, 5 janvier 1833) en 1805 [37, Appendice]. Sa justification comme procédure statistique est due à Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 23 avril 1777 - Göttingen, 22 février 1855) en 1809 [24] puis en 1810 dans son Mémoire sur l'astéroïde Pallas découverte par Heinrich Wilhelm Olbers (Arbergen, 11 octobre 1758 - Bremen, 2 mars 1840) le 28 mars 1802 [25]. Selon lui la méthode des moindres carrés conduit à la meilleure combinaison possible des observations quelque soit la loi de probabilité des erreurs [26]. Elle fut immédiatement reconnue comme une contribution majeure. Gauss affirma l'avoir en fait déjà utilisée dès 1795. Ce qui est certain est qu'il s'en servit en 1801 pour déterminer l'orbite de la comète Cérès découverte par Giuseppe Piazzi (Ponte di Valtellina, 6 juillet 1746 - Naples, 22 juillet 1826) le 1er janvier 1801 [10, 27]. Plus précisément, on a

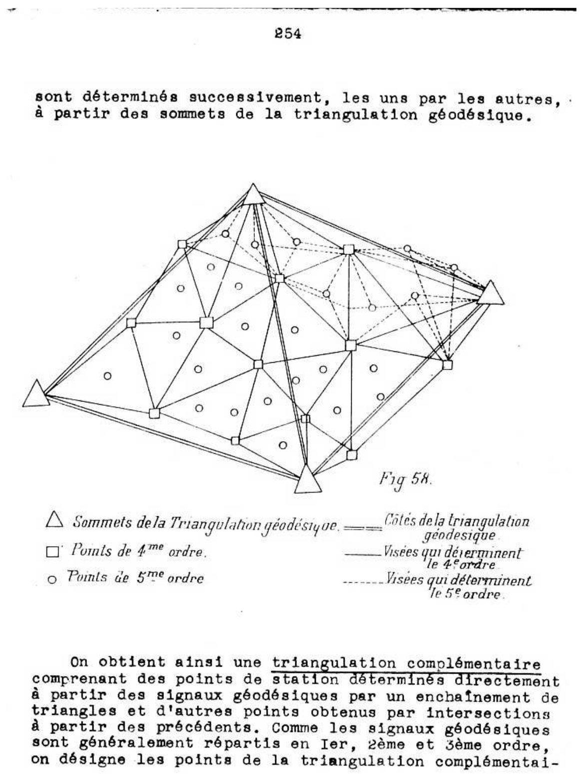
$$\|b - Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(b_i - (Ax)_i)^2 \quad \text{avec} \quad (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Gauss réécrit cette somme comme une autre somme de carrés en éliminant l'un d'entre eux à chaque étape. Exprimée en termes d'algèbre linéaire, c'est la méthode d'*élimination* de Gauss, sa méthode du *pivot* (voir [11, pp. 324-333]). Elle consiste à tirer la première inconnue de la première équation et à la remplacer par son expression dans les équations suivantes. À la seconde étape, on tire la seconde inconnue de la nouvelle seconde équation et on la remplace par son expression dans les équations suivantes. Et ainsi de suite jusqu'à l'avant dernière inconnue que l'on tire de l'avant dernière equation et que l'on remplace par son expression dans la dernière équation. Dans la pratique, ces substitutions se font par combinaisons linéaires des équations du système. On a ensuite à résoudre un système d'équations linéaires dont la dernière équation ne comporte que la dernière inconnue, ce qui en fournit la valeur. L'avant dernière équations ne comporte que les deux dernières inconnues. Comme on vient de calculer la dernière ce celles-ci, on obtient donc immédiatement la valeur de l'avant dernière inconnue. On remonte ainsi jusqu'à la première équation qui contient toutes les inconnues. Mais comme toutes celles-ci sont connues sauf la première, on trouve donc la valeur de la première inconnue. Les travaux de Gauss sont analysés en détail dans [44]. Signalons que le mathématicien américain d'origine irlandaise Robert Adrain (Carrickfergus, Irlande, 30 septembre 1775 - New Brunswick, NJ, USA, 10 août 1843) avait, à l'occasion qu'une question de topographie, publié un article en 1808 (paru en 1809) dans lequel il exposait également la méthode des moindres carrés [3]. Ce travail passa totalement inaperçu en Europe. En 1818, Adrain appliqua encore cette méthode à la détermination de l'aplatissement de la Terre à partir de mesures du méridien [4] et en tira une estimation des axes de l'ellipsoïde terrestre [5]. Sur ces questions, voir [35, pp. 226-230].

Lorsque $m < n$ (c'est-à-dire quand il y a plus d'inconnues que d'équations), le système $Mx = c$ a une infinité de solutions. Parmi toutes les solutions possibles, on recherche celle qui minimise

Figure 1: Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

la somme des carrées des inconnues. C'est exactement ce second cas que l'on rencontre dans les questions de compensation des réseaux géodésiques dont Cholesky eut à s'occuper. Pour établir une carte, le topographe doit réaliser une triangulation du terrain, une procédure inventée par l'astronome danois Tycho Brahé (Knudstrup, 14 décembre 1546 - Prague, 24 octobre 1601) et popularisée par le Hollandais Willebrord Snell Van Royen (Leiden, 1580 - Leiden, 30 octobre 1626), dit Snellius. La triangulation avait été largement utilisée par Pierre Méchain (Laon, 16 août 1744 - , Castellòn de la Plana, Espagne, 20 septembre 1804), Jean-Baptiste Joseph Delambre (Amiens, 19 september 1749 - Paris, 19 août 1822), Jean-Baptiste Biot (Paris, 21 avril 1774 - Paris, 3 février 1862) et François Arago (Estagel, 26 février 1786 - Paris, 2 octobre 1853) pour mesurer, à la demande de la Convention Nationale afin de fixer le mètre étalon, la longueur du méridien terrestre [29]. Une triangulation est constituée d'une chaîne de triangles adjacents. On choisit d'abord un réseau primaire formé de points facilement repérables comme des sommets, des tours ou des clochers. À cause des accidents de terrain, il est plus facile et plus précis de mesurer des angles que des longueurs. De plus les angles ne dépendent pas de l'altitude des points. Ce sont les mesures géodésiques. On commence par mesurer l'un des côtés du premier triangle avec le maximum de précision. Les deux points de départ doivent donc être situés, si possible, sur un terrain plat et uni. Il s'agit d'arpentage. Puis on mesure les angles entre les différents points du réseau à l'aide d'une planchette munie d'une alidade à pinnule ou à lunette. Afin de limiter les incertitudes, ces angles ne doivent pas être trop petits. À partir de la longueur d'un côté et des deux angles adjacents, la trigonométrie nous apprend qu'il est possible de calculer la longueur des deux autres côtés d'un triangle ainsi que le troisième angle. De proche en proche, on obtient ainsi les angles et les côtés de tous les triangles. Comme les sommets des triangles ne sont pas



254

sont déterminés successivement, les uns par les autres, à partir des sommets de la triangulation géodésique.

On obtient ainsi une triangulation complémentaire comprenant des points de station déterminés directement à partir des signaux géodésiques par un enchaînement de triangles et d'autres points obtenus par intersections à partir des précédents. Comme les signaux géodésiques sont généralement répartis en Ier, 2ème et 3ème ordre, on désigne les points de la triangulation complémentai-

Figure 2: Réseaux de triangulation, A. Cholesky, *Cours de Topographie*, p. 254

situés à la même hauteur, les triangles sont inclinés. Il est alors nécessaire des les ramener à l'horizontale en mesurant l'angle que fait chaque côté avec la verticale. C'est le nivellement qui s'effectue à l'aide de mesures zénithales. Enfin, il faut orienter la carte par rapport au nord, c'est-à-dire qu'il faut mesure l'angle, l'azimut, que les côtés font avec le méridien. Il s'agit de mesures astronomiques. Les points obtenus ainsi sont reportés sur un canevas et forment un réseau. Dans chaque triangle, il est souvent possible de mesurer plus que deux angles et la longueur d'un côté. On peut ainsi se mettre à l'abri d'erreurs et augmenter la précision des résultats. De cette façon, on obtient des mesures surabondantes. Si les triangles faisant l'objet de ces mesures surabondantes ne se referment pas, on choisit pour chaque sommet le point qui correspond le mieux à l'ensemble des mesures et l'on détermine les corrections à apporter aux angles mesurés; c'est la *compensation* des réseaux. Si l'on veut réaliser une carte plus précise, le réseau devra être affiné par des triangulations plus petites. À partir des premiers points mesurés, on établit une triangulation plus précise, dite du second ordre, puis une triangulation du troisième ordre et ainsi de suite jusqu'à obtenir la précision désirée pour les détails de la carte.

Selon l'échelle de la carte, il est nécessaire de tenir compte de la forme exacte de la terre.

Les angles et les longueurs sont astreints à vérifier des équations de condition qui expriment le fait que la somme des angles d'un triangle doit être égale à une valeur connue (supérieure à 180 degrés pour tenir compte de la sphéricité de la terre), qu'en chaque point la somme des angles doit valoir 360 degrés et que les longueurs doivent rester les mêmes quelque soit l'ordre dans lequel les mesures sont effectuées (voir, par exemple, [41, 22, 39]).

Enfin, certains points géodésiques ne peuvent être observés qu'à distance et ne sont pas accessibles directement pour y installer les instruments de mesure. C'est, par exemple, le cas des clochers, des faîtes des constructions élevées ou des cheminées. Ainsi que l'écrit Cholesky [13, p. 264]

> *Toutes les fois que l'on fait une triangulation calculée, il y a avantage à faire également une <u>compensation par le calcul</u>. On est alors amené à écrire un certain nombre d'équations représentant les relations géométriques entre les divers éléments des figures de la triangulation et comme il y a généralement plus d'inconnues que d'équations, on lève l'indétermination en écrivant que la somme des carrés des corrections est minima.*

On arrive alors à un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations. On peut donc toujours modifier la valeur des angles de façon que ces équations de condition soient satisfaites au mieux. C'est ce que Gauss appelle la *compensation*. Si l'on a n compensations $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ qui doivent satisfaire m équations de conditions, avec $m < n$, on est alors conduit à un système $Mx = c$. On va choisir, comme Gauss, les compensations les plus plausibles, c'est-à-dire celles qui minimisent la somme des carrés $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. On introduit pour cela m nouvelles variables $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ liées à x par $x = M^T y$. En effectuant le remplacement de x dans le premier système, on obtient $MM^T y = c$. On dit que l'on a résolu le système $Mx = c$ au sens des moindres carrés. La matrice $A = MM^T$ est symétrique et définie positive. Comme nous le verrons plus loin, Cholesky va rechercher une autre matrice, L, triangulaire inférieure, telle que les équations de condition s'écrivent $LL^T y = c$. En posant $z = L^T y$, ce système devient $Lz = c$. Sa résolution, simple puisque L est triangulaire, fournit le vecteur z. Ce vecteur z étant calculé, on résout le système $L^T y = z$, ce qui donne y. Il ne reste plus ensuite qu'à calculer x par la formule $x = M^T y$.

La méthode des moindres carrés, également très utilisée en astronomie, conduit donc à la résolution d'un système d'équations linéaires dont la matrice est symétrique définie positive. Naturellement, les formules de Cramer en donnent la solution, mais une solution toute théorique puisque le volume des calculs les rendent rapidement impraticables. En effet, sur un ordinateur effectuant dix millions d'opérations arithmétiques par seconde, il faudrait quarante milliards d'années pour résoudre un système de dimension 23, c'est-à-dire beaucoup plus que l'âge de l'univers! Rapidement donc, les scientifiques se sont intéressés aux méthodes d'élimination comme celle de Gauss.

Il est bien connu que certains résultats sont redécouverts indépendamment par plusieurs scientifiques et cela, parfois, à plusieurs années et des milliers de kilomètres de distance. C'est le cas des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

L'algèbre matricielle fut développée par Arthur Cayley (Richmond, 16 août 1821 - Cambridge, 26 janvier 1895) dans les années 1850. Du point de vue théorique, la méthode de Gauss revient à décomposer la matrice A en un produit $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité (c'est-à-dire que tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls et que ceux de la diagonale sont égaux à 1) et où U est une matrice triangulaire supérieure (c'est-à-dire que tous les éléments en dessous de la diagonale sont nuls). Le système s'écrit alors $LUx = b$, c'est-à-dire $Ly = b$ si l'on pose $y = Ux$. La résolution du système $Ly = b$ fournit le vecteur y qui sert ensuite de second membre au système $Ux = y$ et l'on obtient la solution cherchée x.

Une variante de la méthode de Gauss, dans laquelle on transforme le système en un système diagonal, fut proposée par le topographe allemand Wilhelm Jordan (Ellwangen, 1842 - Hanovre, 1899) en 1873 [34]. Il ne faut pas le confondre, comme c'est souvent le cas, avec Camille Jordan dont Cholesky fut l'élève à l'École Polytechnique et qui fut, avec Eugenio Beltrami (1835 - 1900), à l'origine de la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (voir [45]).

Le 9 novembre 1878, Myrick H. Doolittle (Addison, Vermont, USA, 17 mars 1830 - 27 juin 1913), un mathématicien de la *Computing Division* de l'*U.S. Coast and Geodetic Survey* de Washington, présente une méthode de résolution des équations normales provenant de problèmes de triangulation [16]. Sa méthode consiste à annuler pas à pas les éléments de la matrice pour la transformer en une matrice triangulaire supérieure. Elle revient en fait à décomposer A en un produit $A = LU$ à l'aide d'une succession de n étapes intermédiaires pour obtenir ces matrices sous la forme $L = L_1 + \cdots + L_n$ et $U = U_1 + \cdots + U_n$. La matrice L est triangulaire inférieure et la matrice U est triangulaire supérieure mais c'est elle qui, contrairement à la méthode de Gauss, est à diagonale unité. Il montre également comment l'on peut rajouter de nouvelles équations et de nouvelles inconnues au système sans être obligé de recommencer tous les calculs. Cette technique s'apparente à notre méthode de *bordage*. Cette possibilité était, selon lui, l'un des principaux avantages de sa méthode. Doolittle n'avait pas de machine à calculer à sa disposition et il utilisait simplement des tables de multiplication. Il dit avoir résolu, avec l'aide de J.G. Porter, un système de 41 équations en cinq jours et demi, c'est-à-dire en 36 heures de travail. Le Lieutenant-Commander H.A. Seran rencontrera Doolittle à Washington en 1907. Il raconte qu'il était alors assez âgé et se mettait en chaussons au bureau. Pour savoir quand il était 16h30, l'heure de partir, il faisait sonner un réveil qui était entendu dans toute la Division. Doolittle prit sa retraite en 1911 pour cause de maladie.

Comme nous l'avons vu, les calculs de compensation des réseaux géodésiques conduisent à la résolution d'un système d'équations au sens des moindres carrés. On résout les équations normales par des méthodes d'élimination qui s'apparentent à celles de Gauss et de Doolittle. La méthode de Doolittle eut un succès certain et fut utilisée, avec des variantes, pendant de nombreuses années en géodésie. Par exemple, une telle méthode est décrite en 1912 dans le livre de Charles Lallemand [36] (Saint Aubin sur Aire, Meuse, 7 mars 1857 - Bussy, Haute Marne, 1er février 1938), Membre de l'Institut et Directeur du Service du Nivellement Général de la France. Cholesky en possédait un exemplaire.

En 1907, Otto Toeplitz (Breslau, Allemagne, 1er août 1881 - Jérusalem, 19 février 1940)

Figure 3: Otto Toeplitz (1881-1940)

démontre qu'une matrice hermitienne peut être factorisée en un produit LL^* avec L triangulaire inférieure, mais il ne donne aucun procédé pour obtenir cette matrice L [48]. C'est ce que fera Cholesky en 1910, mais son travail restera longtemps inconnu.

En 1915, l'astronome Willem De Sitter (Sneek, Pays-Bas, 6 mai 1872 - Leiden, 19 novembre 1934) détaille une méthode de résolution des équations normales [43, Appendix, pp. 160-173]. Développée indépendamment du travail de Friedrich Robert Helmert (Freiberg, 31 juillet 1843 - Potsdam, 15 juin 1917) [30], De Sitter l'avait déjà exposée dans sa leçon inaugurale à l'Université de Leiden en 1908 et elle était utilisée depuis au Laboratoire Astronomique de Groningen. Cette méthode était en effet d'un emploi simple même pour des personnes inexpérimentées en calcul numérique. Moins de trois heures de calcul étaient nécessaires pour un système de dimension 6. Elle semble consister essentiellement une disposition pratique pour mettre en œuvre la méthode de Gauss. De Sitter donne également une procédure de vérification de la solution obtenue.

Une forme simplifiée de la méthode de Doolittle est due à Frederick V. Waugh en 1935 [50]. Des variantes de la méthode d'élimination de Gauss furent également étudiées par Alexander Craig Aitken (Dunedin, Nouvelle Zélande, 1 avril 1895 - Édimbourg, 3 novembre 1967) en 1932 [6], Prescott Durand Crout en 1941 [14, 15], Harold Hotelling (1895 - 1973) en 1943 [31] et enfin Paul Summer Dwyer (né en 1901) en 1944 [20].

En 1938, l'astronome polonais Tadeusz Banachiewicz (Varsovie, 13 février 1882 - 17 novembre 1954) proposa une *méthode de la racine carrée* [7] tout à fait similaire à celle de Cholesky (voir aussi [8] où une méthode de décomposition d'une matrice quelconque est formulée). Cependant le langage utilisé était celui des *cracoviens*, des objets qu'il avait inventés et étaient similaires aux matrices mais avec une loi de multiplication différente. C'est lui qui, le premier, formula le fait

Figure 4: Tadeusz Banachiewicz (1882-1954)

que les méthodes d'élimination correspondent, en fait, à la factorisation de la matrice A en un produit de deux matrices. Mais nous verrons qu'il avait été également précédé par Cholesky dans cette interprétation.

En 1941, Dwyer fournit une version abrégée de la méthode de Doolittle [18] et la relie aux autres méthodes de résolution [19]. En 1944, il donne l'interprétation matricielle de la méthode de Doolittle [20]. Il montre aussi que $L = DU^T$ où D est une matrice diagonale et fait la remarque qu'il serait plus intéressant que les matrices L et U^T soient les mêmes afin d'effectuer deux fois moins de calculs. Pour cela, il suffirait de prendre les racines carrées des termes diagonaux, c'est-à-dire de la matrice D, et il note que la méthode ainsi obtenue s'apparenterait à celle de Banachiewicz. Sur la chronologie de ces divers travaux, on pourra consulter [21].

Aucune de ces contributions, à part celle de Banchiewicz en 1938, ne ressemblait à la méthode de Cholesky. De plus, elles lui étaient toutes postérieures.

1.2 La contribution de Cholesky

Cholesky ne publia jamais ses travaux bien qu'il ait rédigé lui-même des rapports sur les opérations de nivellement de précision qu'il dirigeait en Algérie et en Tunisie [1] (voir aussi [2]). Une méthode nouvelle pour le calcul de la correction de mire y est donnée mais il est bien difficile d'y voir les prémices de sa méthode de factorisation.

La méthode de Cholesky fut, en fait, exposée pour la première fois dans une note de 1924 due au Commandant Benoît [9], de l'Artillerie Coloniale, ancien officier géodésien au Service Géographique de l'Armée et au Service Géographique de l'Indochine, Membre du Comité National Français de Géodésie et de Géophysique (il n'a pas été possible de trouver des renseignements biographiques plus précis sur lui). Benoît écrit

> *Le Commandant d'Artillerie Cholesky, du Service géographique de l'Armée, tué pendant la grande guerre, a imaginé, au cours de recherches sur la compensation des réseaux géodésiques, un procédé très ingénieux de résolution des équations dites normales, obtenues par application de la méthode des moindres carrés à des équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues. Il en a conclu une méthode générale de résolution des équations linéaires.*
>
> *Nous suivrons, pour la démonstration de cette méthode, la progression même qui a servi au Commandant Cholesky pour l'imaginer.*
>
> *On sait que la* compensation *d'un réseau géodésique a pour but de tirer des valeurs angulaires d'observation un système* corrigé *tel que toutes les vérifications de figures soient satisfaites et que la figure géométrique ainsi obtenue déforme aussi peu que possible celle que donneraient les valeurs d'observation.*
>
> *Ces conditions de figure: fermeture des angles des différents triangles, égalités des longueurs obtenues pour un même côté quel que soit l'enchaînement suivi, donnent lieu à des équations dites* de condition *qui, développées par rapport aux corrections, peuvent être limitées au* 1*er ordre de petitesse.*
>
> *On a, en somme, à résoudre un système de p équations linéaires entre les n corrections angulaires, devenues les véritables inconnues, n étant plus grand que p, sans quoi il serait inutile de procéder à des observations, le problème serait indéterminé. On s'impose la condition supplémentaire, déjà mentionnée, de déformer le moins possible la figure d'observation, c'est-à-dire de satisfaire aux équations avec les valeurs les plus petites possibles des inconnues.*
>
> *On pourrait, pour cela, exprimer que la somme des* valeurs absolues *des inconnues est minima: mais cette condition ne se prête pas à une résolution algébrique commode et c'est la principale raison pour laquelle on préfère appliquer la méthode des* moindres carrés *de Legendre, qui donne d'ailleurs, en principe, le système correctif le plus probable...*

L'article de Benoît se continue par le *Résumé* suivant

> Résumé. - *En somme, les calculs très complexes par les méthodes ordinaires, y compris celle de Gauss, et qui nécessitent autant de tableaux distincts que d'inconnues à éliminer, d'où une complication d'écriture extrême, deviennent, par la méthode Cholesky et l'emploi de la machine à calculer, relativement aisés et beaucoup plus courts. Ils sont présentés sur un seul tableau, où l'ordre de formation est facile à reconnaître et où les opérations sont toujours les mêmes. On peut, avec cette méthode,*

aborder facilement des résolutions à 40 ou 50 inconnues, qui auraient demandé des semaines de travail ardu par les procédés antérieurs.

Enfin, il est intéressant d'en citer le dernier paragraphe

> Application de la méthode Cholesky à la résolution d'un système de p équations linéaires à p inconnues. - *Le système étant déterminé, n'a qu'une solution unique, que l'on obtiendra par suite, également, en recherchant la solution minima fournie par l'application de la méthode des moindres carrés. Le procédé de calcul du Commandant Cholesky peut dès lors s'adapter à la résolution d'un système d'équations linéaires quelconques.*
>
> *Mais cette adaptation est plus théorique que pratique, car elle entraîne à des calculs qui sont généralement plus longs que la résolution directe du système par une des méthodes habituelles: substitutions, éliminations, etc... Elle a cependant deux avantages assez importants: d'une part celui de réduire les écritures, et, d'autre part, de constituer une méthode homogène, d'application brutale, présentant des vérifications continuelles.*

L'article de Benoît se termine par un exemple numérique de compensation d'un quadrilatère par la méthode de Cholesky.

La méthode de Cholesky fut sortie de l'oubli par John Todd (né le 16 mai 1911) qui l'exposa dans son cours d'analyse numérique au King's College à Londres dès 1946 [47] et la fit ainsi connaître. Avec sa femme, la mathématicienne Olga Taussky (Olmütz, Empire Austro-Hongrois, 30 août 1906 - Pasadena, USA, 7 octobre 1995), ils racontent [46]

> *En 1946 l'un de nous* [John Todd] *donna un cours au King's College de Londres (KCL) sur les Mathématiques Numériques. Bien que nous ayons quelque expérience du temps de guerre en mathématiques numériques, incluant les valeurs propres de matrices, nous n'avions eu que peu affaire avec la résolution des systèmes d'équations linéaires. Afin de voir comment ce sujet pouvait être présenté, nous fîmes un examen de Math. Rev. (facile à cette époque!) et trouvâmes une analyse (MR 7 (1944), 488), d'un article de Henry Jensen [33], écrit par E. Bodewig. Jensen déclarait* la méthode de Cholesky semble posséder tous les avantages. *Ainsi il fut décidé de suivre Cholesky et, puisque la méthode était clairement exposée, nous n'essayâmes pas de trouver l'article original.*
>
> *Leslie Fox, alors dans la Division de Mathématiques nouvellement créée du (British) National Physical Laboratory (NPL), suivit le cours et apparemment trouva la méthode de Cholesky attractive puisqu'il la rapporta au NPL, où il l'étudia en profondeur avec ses collègues. À partir de ces articles la méthode de Cholesky (ou parfois Choleski) fît son chemin dans les boites à outils des algébristes numériques linéaires via les manuels des années 1950.*

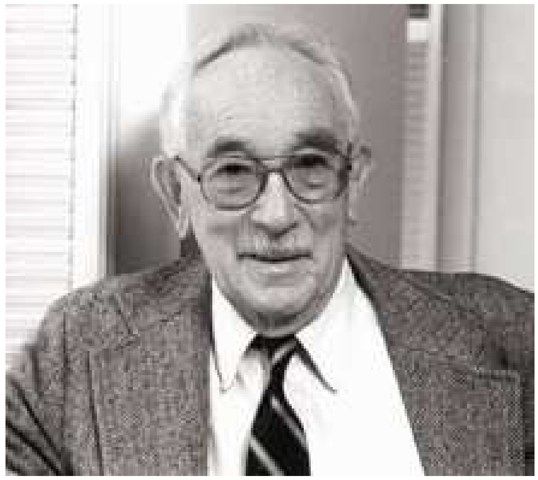


Figure 5: John Todd

Dans les examens du B.A. Honours et B.Sc Special Examinations en *Mathématiques, sujets avancés - Méthodes numériques* pour les étudiants internes au King's College en 1947, Todd donna un exercice sur l'application de la méthode de Cholesky à une matrice de Hilbert 4×4. Comme il le raconte, Todd porta cette méthode à l'attention de Leslie Fox (décédé en 1992), Harry Douglas Huskey (né en 1916 à Bryson City, NC, USA) et James Hardy Wilkinson (Strood, 27 septembre 1919 - Londres, 5 octobre 1986) qui en firent la première analyse [23]. Sa stabilité numérique fut simultanément étudiée par Alan Mathison Turing [49] (Londres, 23 juin 1912 - Wilmslow, 7 juin 1954), l'un des pionniers de l'informatique et des ordinateurs (voir [38] pour un travail plus récent et plus complet sur cette question).

Les travaux de Cholesky ont été analysés en détail dans [11, pp. 347-351] à partir de l'article du Commandant Benoît [9].

Donc, à cette époque, la seule trace de la méthode de Cholesky qui existait dans la littérature scientifique était cet article du Commandant Benoît. Dans le Fonds A. Cholesky de l'École Polytechnique, côte B4, il existe un manuscrit de 8 pages 21.8×32 cm de Cholesky où cette méthode est parfaitement exposée. Il est intitulé *Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires* et porte la date du 2 décembre 1910. Ce manuscrit, contrairement aux autres manuscrits contenus dans le Fonds A. Cholesky, ne comporte presque pas de ratures. Seuls quelques mots sont rayés et remplacés par d'autres. On peut donc supposer qu'il ne s'agit pas là d'une première rédaction mais nous n'avons aucune indication sur la date réelle à laquelle Cholesky inventa sa méthode.

1.3 Analyse du manuscrit

Nous allons donc voir maintenant, à la lumière du manuscrit original de Cholesky non publié et retrouvé dans le Fonds A. Cholesky [12], comment il a lui-même présenté sa méthode. Il n'est pas possible de savoir si le Commandant Benoît a pu consulter cette note manuscrite de Cholesky mais, en tous les cas, les deux hommes se sont connus vers 1905, à l'occasion de la mesure de la méridienne de Lyon.

Cholesky commence par considérer le système linéaire carré I: $\alpha\gamma + C = 0$ où α est une matrice $n \times n$, γ et C des vecteurs de dimension n. Puis il pose II: $\gamma = \alpha^T \lambda$. Ainsi I devient III: $A\lambda + C = 0$. Il donne les formules IV qui permettent de calculer les éléments de la matrice A. L'élément de A qui se trouve dans la colonne p et la ligne q est le produit scalaire des lignes p et q de la matrice α du système I. On a donc $A = \alpha\alpha^T$. Dans un produit, l'ordre des facteurs pouvant être inversé, A est symétrique.

Cholesky se propose donc de résoudre un système de la forme III. Il remarque que si γ est connu alors II est un système équivalent à III mais avec λ comme inconnue. On peut donc résoudre III si l'on trouve un système I permettant de calculer facilement γ.

C'est ce qu'il se passe si la matrice α du système I est triangulaire inférieure. En effet, la première équation ne contient que γ_1, la seconde ne contient que γ_1 et γ_2 et ainsi de suite. Il faut donc trouver un système V: $\alpha\gamma + C = 0$ avec α triangulaire inférieure. Puisque ce système est facile à résoudre, une fois trouvé γ le système II devient le système VI: $\alpha^T\lambda - \gamma = 0$ qui se résout de proche en proche à partir de λ_n.

Il reste maintenant à calculer les éléments de la matrice triangulaire inférieure α. Il suffit pour cela d'utiliser les formules IV qui donnent les éléments de A en fonction de ceux de α, c'est-à-dire d'identifier les éléments correspondants des matrices A et $\alpha\alpha^T$. Il obtient alors les formules de base de la méthode de Cholesky telles qu'on les trouve dans tous les livres d'analyse numérique. Ce sont ces formules qui contiennent un calcul de racine carrée (ce qui donnera l'autre nom de la méthode). En passant, il démontre que sa méthode revient a décomposer une matrice A symétrique en un produit $A = \alpha\alpha^T$ avec α triangulaire inférieure. Il faut remarquer qu'à aucun moment Cholesky ne se préoccupe de savoir si les quantités dont il doit prendre la racine carrée sont positives. Mais il est vrai que, dans le cas qui l'intéresse, elles le sont toujours.

Enfin, Cholesky donne les formules permettant de résoudre le système V $\alpha\gamma + C = 0$ et dit que la résolution du système VI $\alpha^T\lambda - \gamma = 0$ est similaire.

Cholesky s'intéresse ensuite à la mise en œuvre de sa méthode. Puisque A est symétrique, seule la moitié de la matrice est nécessaire, la seconde moitié pouvant être utilisée pour y placer la matrice α. Le calcul des éléments de α nécessite une somme algébrique de produits. Cette somme s'effectue automatiquement sur une machine à calculer du type *Dactyle* dont on utilise les pleines capacités. D'autre part, cette machine met l'opérateur à l'abri des erreurs de signe en indiquant le résultat avec des chiffres blancs ou rouges suivent son signe. Ces machines *Dactyle* furent construites par l'entreprise Château jusqu'au début des années 1950. Ce sont celles dont le corps est formé par un quart de cylindre sur lequel coulissent des index que l'on place en face des chiffres décimaux et qui comportent une manivelle sur la droite de l'appareil. Ces machines avaient été inventées par l'ingénieur suédois Willgodt-Theophil Odhner (1845-1905) vers 1878. Le brevet étant tombé dans le domaine public en 1906, de nombreuses copies en furent alors fabriquées dans le monde entier, certaines avec des améliorations [40].

Figure 6: Machines à calculer *Dactyle*

Puis Cholesky discute les avantages de sa méthode au point de vue de la précision numérique. Il considère un système général $A\lambda + C = 0$. Il le remplace par la résolution successive de $\beta\varepsilon + C = 0$, où la matrice β est triangulaire inférieure, et de $\delta\lambda - \varepsilon = 0$, où la matrice δ est triangulaire supérieure. On a donc $A = \beta\delta$, d'où, par identification, les formules qui fournissent les éléments de ces matrices. Le produit des éléments de β et δ situés ligne p et colonne q est égal au carré de l'élément correspondant de α, c'est-à-dire $\beta_{pq}\delta_{pq} = \alpha_{pq}^2$. Les calculs s'effectuent forcément avec une précision limitée. Donc ces nombres sont entachés d'une erreur η. Le calcul de α_{pq}^2 introduit, en première approximation, une erreur $2\alpha_{pq}\eta$ et celui de $\beta_{pq}\delta_{pq}$ une erreur de $(\beta_{pq} + \delta_{pq})\eta$. Puisque $\beta_{pq}\delta_{pq} = \alpha_{pq}^2$, on a donc $(\beta_{pq} + \delta_{pq})\eta = (\beta_{pq} + \alpha_{pq}^2/\beta_{pq})\eta$. En dérivant cette expression par rapport à β_{pq} on voit que cette erreur est minimale lorsque $\beta_{pq} = \alpha_{pq}$. On doit donc avoir $\delta_{pq} = \beta_{pq}$ et Cholesky en conclut que sa méthode, où les deux matrices sont transposées l'une de l'autre, est celle qui conduit à l'erreur numérique la plus faible. On voit qu'il fait là un véritable travail d'analyse numérique.

Mais ses réflexions continuent. Sa méthode réclame l'extraction de racines carrées. Il indique donc un procédé différent de ceux prônés par les constructeurs de machines à calculer. Soit à calculer $r = \sqrt{N}$ et soit n une valeur approchée de cette racine carrée. On pose $r = n + \varepsilon$. D'où

$$N = r^2 = (n+\varepsilon)^2 = n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 \simeq n(n + 2\varepsilon)$$

en se limitant aux termes du premier ordre. Cholesky en déduit que

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{N}{n} - n\right)$$

et que l'on obtient une meilleure approximation de r en ajoutant cette valeur à n. Si l'on effectue cette opération on obtient

$$r \simeq n + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{n} - n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{n} + n\right),$$

procédé qui peut être réitéré et n'est autre que la méthode d'Héron d'Alexandrie (1er siècle de notre ère) pour l'extraction des racines carrées (elle est souvent attribuée à Newton) et qui est utilisée par toutes les calculettes quand nous appuyons sur la touche $\sqrt{\cdot}$.

Supposons que l'on dispose d'une table numérique donnant les valeurs des racines carrées avec 3 chiffres significatifs exacts. ε/n est alors inférieur à 10^{-2} et son carré est inférieur à 10^{-4}. La première itération fournit par conséquent 5 chiffres significatifs. $(\varepsilon/n)^2$ est plus petit que 10^{-8} et la seconde itération donne donc 9 chiffres exacts. Cholesky en conclut que si la table numérique dont on est parti donne la racine carrée avec un chiffre exact, alors on double ce nombre de chiffres à chaque itération. C'est-à-dire, en langage moderne, que la procédure est d'ordre 2, qu'elle est à convergence quadratique.

Il expose ensuite une méthode pour vérifier si aucune erreur ne s'est glissée dans les calculs. Pour ce faire, il considère le système $A\lambda' - V = 0$ où $V = Ae + C$ et e le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Si l'on résout ce nouveau système par la même méthode on aura $\alpha\gamma' - V = 0$, dont la résolution fournit le vecteur γ', puis on obtiendra λ' comme solution du système $\alpha^T\lambda' = \gamma'$. Cholesky exprime cette propriété en écrivant que *cette relation linéaire se maintiendra et sera encore vraie pour les coefficients* α. On a donc $A\lambda' - V = A\lambda' - Ae - C = A(\lambda' - e) - C = 0$ ce qui montre, en comparant avec le système initial $A\lambda + C = 0$, que, pour tout p, $\lambda_p + \lambda'_p = 1$. On a donc là un moyen pour vérifier les calculs au fur et à mesure de leur avancement. Comme le fait remarquer le Commandant Benoît *On ne passe ainsi au calcul d'une colonne qu'après vérification certaine de la précédente.*

Cholesky termine son travail disant qu'un système de dimension 10 peut être résolu en 4 ou 5 heures par sa méthode. Il cite le cas de plusieurs systèmes dépassant la dimension 30, et même d'un système de dimension 56 provenant d'un calcul de compensation, dont les solutions ont été obtenues de la même manière.

Pour conclure, on peut dire que cette note manuscrite de Cholesky constitue un travail d'analyse numérique complet et tout à fait remarquable pour l'époque (et même pour la notre): présentation et justification théorique d'un algorithme, étude de la disposition pratique des calculs sur une feuille de papier, discussion des problèmes posés par la mise en œuvre sur machine à calculer, étude des erreurs numériques dues à la précision finie des calculs, procédure de vérification des résultats et commentaires sur les essais numériques. De nos jours, la méthode de Cholesky est toujours d'une importance majeure.

2 Documents militaires

On trouve dans le Fonds A. Cholesky de nombreux documents à caractère scientifique rédigés par Cholesky à l'occasion de ses activités pendant la guerre. Certains sont manuscrits et d'autres tapés à la machine. Ils montrent que leur auteur mis sa culture scientifique au service de l'armée.

2.1 Manuscrits

- Canevas de tir pour situer le plus exactement possible la ligne de combat (2 p.).
- Surveillance des aéronefs (1 p.).
- Protection contre les incursions des aéronefs (1 p.).
- Lieu du point apparent d'émission du claquement pour une pièce de 77 du Grafen Wald pour la Section B, quand on fait varier le plan de tir de la pièce (1 p. et 3 p. de brouillon).
- Tenue à jour du programme de la photo aérienne (2 p.).
- Appareil de pointage pour mitrailleuse sur avion Nieuport (3 p.).
- But du groupe de canevas de tir (2 p.).
- Canevas de tir pendant la marche en avant (5 p.).
- Instructions particulières à l'artillerie pour l'emploi des contres-batteries (complément à l'ordre général no. 12).
- Instructions pour la surveillance des aéronefs (1 p.).
- Étude d'artillerie (1 p.).
- Projet de répartition du travail dans le GCTA (3 p.).
- Manuscrit sans titre sur le travail de l'officier géographe (5 p.).
- Manuscrit sans titre sur les repérages par avions (3 p.).
- Manuscrit sans titre avec des calculs numériques sur les arrangements (1 grande double page).
- Sur le combat aérien (10 p.).
- Organisation du tir de l'artillerie (36 pages dactylographiées). Il s'agit des conférences faites par Cholesky et le Capitaine de Fontanges en mai 1915 .

2.2 Documents imprimés

- Étude sur le tir d'artillerie contre les batteries masquées (envoyé le 5 novembre 1914 depuis Somme-Suippe au Chef d'Escadron Girard, commandant le 3ème groupe du 23ème Régiment d'Artillerie).
- Projet d'organisation de l'observation et du tir d'artillerie sur un front de Corps d'Armée (24 décembre 1914).

- Opérations topographiques effectuées par l'artillerie pour relever les batteries et leurs repères.
- Notes sur le tir avec observateurs latéraux et aériens (avril 1915).

Les documents militaires officiels (instructions, rapports, notes de service, etc.) ne comportent pas toujours de signature. Cependant, d'après le sujet et le style, il est à peu près certain que d'autres documents qui se trouvent dans le Fonds A. Cholesky lui sont dues. Par exemple, des corrections de la main de Cholesky se trouvent dans une *Instruction sur l'organisation et les attributions des groupes de canevas de tir des armées*, en date du 23 décembre 1915 et signée par Joffre.

3 Cours de l'ESTP

Divers manuscrits relatifs au travail de Cholesky comme professeur à l'*École Spéciale des Travaux Publics, du Bâtiment et de l'Industrie* (ESTP) se trouvent dans le Fonds A. Cholesky.

La planchette, ou goniographe, est un instrument capital en topographie et il en est largement fait mention dans les écrits de Cholesky. C'est un appareil qui sert à reporter sur une feuille, le canevas, les angles qui ont été mesurés par un goniomètre. L'alidade est un instrument de visée employé pour viser et tracer des directions. Il a été inventé par Archimède, au 3ème siècle. Il comporte une règle avec deux pinnules qui pivote sur un cercle gradué et qui est montée sur la planchette d'un goniographe. La règle comporte un biseau gradué le long duquel on trace le trait qui correspond à la direction de l'objet pointé. Dans l'alidade holométrique, inventée en 1667 par les français Adrien Auzout (Rouen, 28 janvier 1622 - Rome, 23 mai 1691) et Jean Picard (La Flèche, 21 juillet 1620 - Paris, 12 octobre 1682), cette visée s'effectue à l'aide d'une lunette comportant une règle à éclimètre. Elle est utilisée pour les levés à moyenne et grande échelle. Ces instruments nécessitent un ensemble de réglages délicats afin d'assurer une précision maximale aux mesures. Cholesky les a décrit largement dans ses divers cours de l'ESTP.

3.1 Complément de Topographie

C'est un cours manuscrit de 239 pages intitulé *Complément de Topographie* et écrit sur des feuilles de 15.5×20 cm. Nous en possédons également une version en caractères d'imprimerie calligraphiés avec des corrections de la main de Cholesky. Donnons-en une table des matières succincte

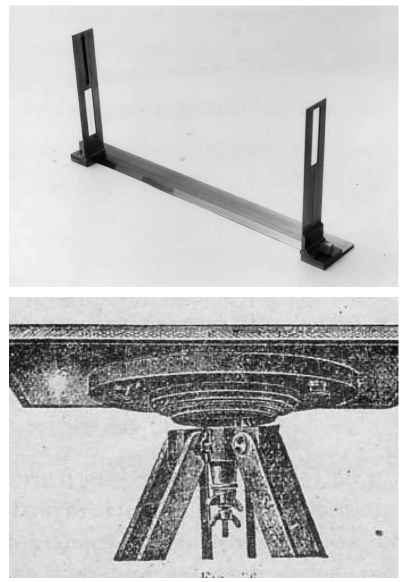


Figure 7: Alidade à pinnules et planchette

Chapitre I	Généralités
Chapitre II	Plans de topographie détaillée
	Étude complète d'un levé au $1/1000^e$
	Exécution du levé
	Piquetage et repèrement des points du canevas
	Levé du canevas
	Stations de planchette. Construction du canevas
	Nivellement
	Levé des détails
	Nivellement des détails
Chapitre III	Levé à la boussole. Éclimètre
Chapitre IV	Triangulation graphique

3.2 Cours de Calcul Graphique

C'est un cours manuscrit de 83 pages, sur des pages de 15.5×20 cm. En voici la table des matières

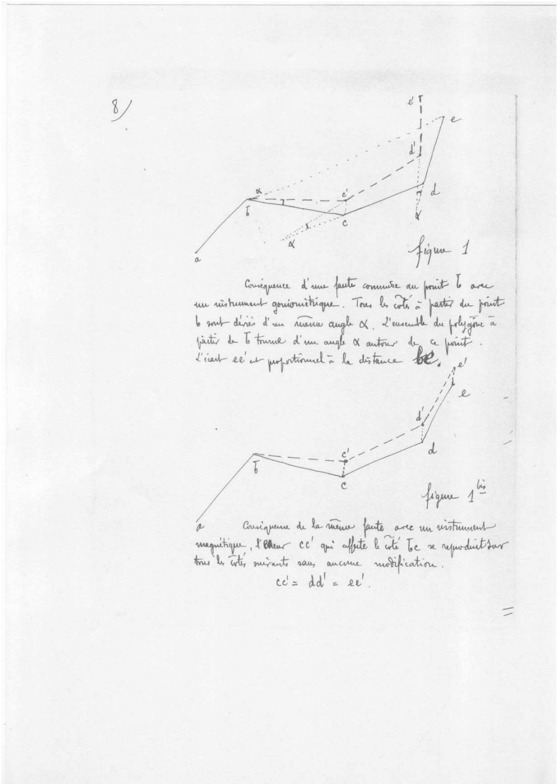
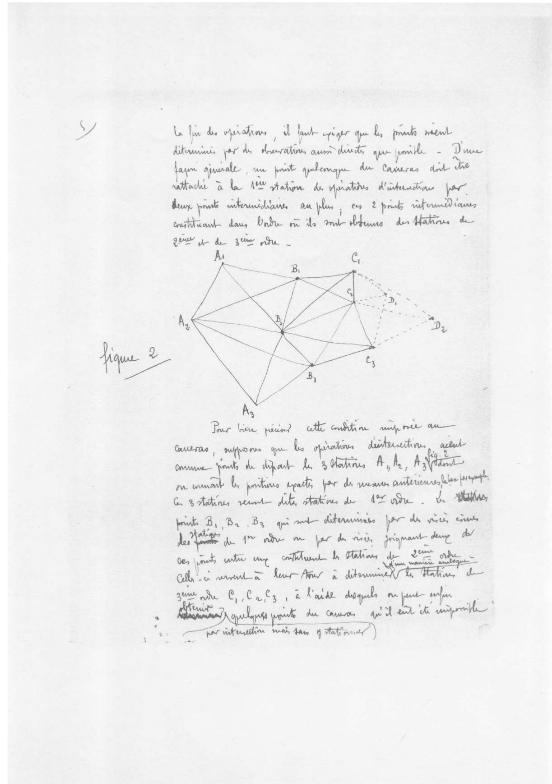
 

Figure 8: Pages manuscrites de Cholesky sur la triangulation

Avant-Propos	
Chapitre I	Généralités
	Représentation graphique des nombres
	Courbes - Diagrammes - Équations à 2 variables
	Surfaces - Équations à 3 variables
Chapitre II	Abaques
	Abaques à deux variables
	Théorie générale des abaques

Il est intéressant de citer le début de l'Avant-Propos

No. 1 - Définition du calcul graphique - Son utilité

Le calcul graphique a pour objet de remplacer les calculs numériques par un dessin, une sorte d'épure, dont la construction permet de passer directement des données au résultat. L'épure employée est généralement désignée sous le nom d'Abaque.

L'exécution d'une telle épure est souvent compliquée et demande d'autant plus de soin que l'on désire une précision plus grande. Aussi n'a-t-on pas en général intérêt *à chercher à résoudre graphiquement un cas isolé, pour lequel la construction du graphique demanderait le plus souvent beaucoup plus de temps que le calcul numérique.*

Au contraire, les procédés du calcul graphique deviennent très avantageux lorsqu'il s'agit d'un calcul qui se reproduit très fréquemment, de l'application d'une formule dans laquelle les données seules varient. Le dessin peut alors être disposé de façon à fournir à l'aide d'opérations simples les résultats correspondants à tous les systèmes de valeurs des variables. L'établissement de l'épure peut dans ce cas être très long, il n'en résulte pas moins une économie de temps très sensible, si chaque fois qu'on s'en sert pour une opération très fréquente, on gagne une partie notable de la durée du calcul numérique qui se trouve ainsi supprimé.

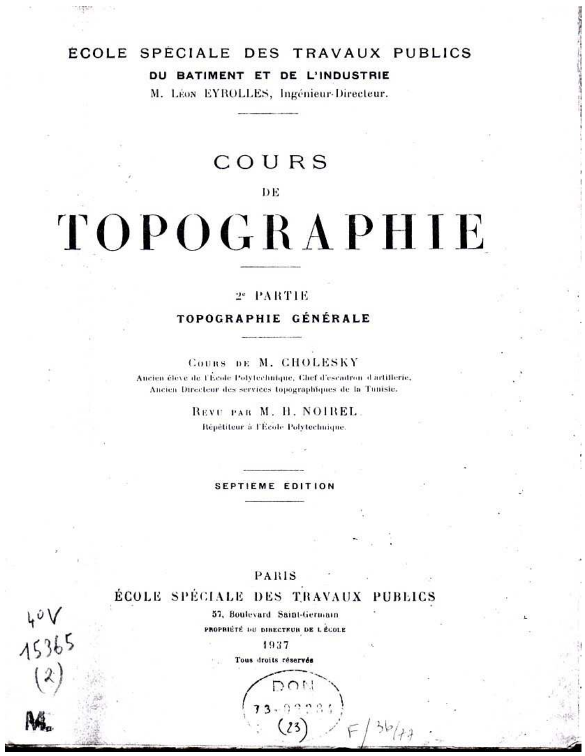
Le calcul graphique s'applique donc principalement à des calculs qui doivent être répétés très fréquemment.

Il est inutile d'insister sur l'intérêt que présente toute réduction dans la durée des calculs, cette réduction se traduisant toujours par une économie de temps et par suite d'argent; c'est pour cette raison qu'on a cherché à réduire la durée des calculs numériques en calculant à l'avance des Tables numériques constituant absolument l'équivalent des épures employées dans le calcul graphique. L'avantage de ces dernières est que généralement elles sont plus faciles et moins longues à établir; de plus leur emploi est moins pénible pour le calculateur.

3.3 Cours de Topographie

Nous possédons les pages 44 à 218 du manuscrit d'un livre de Cholesky intitulé *Cours de Topographie* et publié par l'École Spéciale des Travaux Publics à une date inconnue. Ce livre connu un succès certain puisqu'il eut au moins sept éditions. La septième édition, qui date de 1937, (Bibliothèque Nationale de France, cote 4-V-15365 (2)) fut revue par Henri-Albert Noirel, répétiteur à l'École Polytechnique. Elle contient 442 pages, 100 figures et 18 planches ou photographies d'instruments.

En voici la table des matières



ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE
M. Léon EYROLLES, Ingénieur-Directeur.

COURS
DE
TOPOGRAPHIE

2e PARTIE
TOPOGRAPHIE GÉNÉRALE

Cours de M. CHOLESKY
Ancien élève de l'École Polytechnique, Chef d'escadron d'artillerie,
Ancien Directeur des services topographiques de la Tunisie.

Revu par M. H. NOIREL
Répétiteur à l'École Polytechnique.

SEPTIEME EDITION

PARIS
ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS
57, Boulevard Saint-Germain
PROPRIÉTÉ DU DIRECTEUR DE L'ÉCOLE
1937
Tous droits réservés

Figure 9: Cours de Topographie de Cholesky

Première Partie	Considérations générales
Chapitre I	Définitions - De l'échelle
Chapitre II	Particularités des cartes de topographie générale
Chapitre III	Erreurs - Fautes
Deuxième Partie	Instruments
Chapitre IV	Caractéristiques des instruments de topographie générale
Chapitre V	Instruments pour la mesure des longueurs
Chapitre VI	Instruments pour la mesure des angles
Chapitre VII	Instruments pour l'établissement et l'emploi des perspectives
Chapitre VIII	Instruments pour la détermination des altitudes
Chapitre IX	Accessoires
Troisième Partie	Étude des levés
Chapitre X	Méthode générale
Chapitre XI	Plans de topographie générale
Chapitre XII	Cartes chorographiques
Chapitre XIII	Levés hydrographiques
Chapitre XIV	Levés par les perspectives

Le nom de Cholesky se retrouve dans certains ouvrages actuels de topographie. Sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires y est citée en rapport avec la méthode des moindres carrés. Il est également fait mention du *cheminement double de Cholesky* dans [28].

4 Autres manuscrits

Le Fonds A. Cholesky renferme également

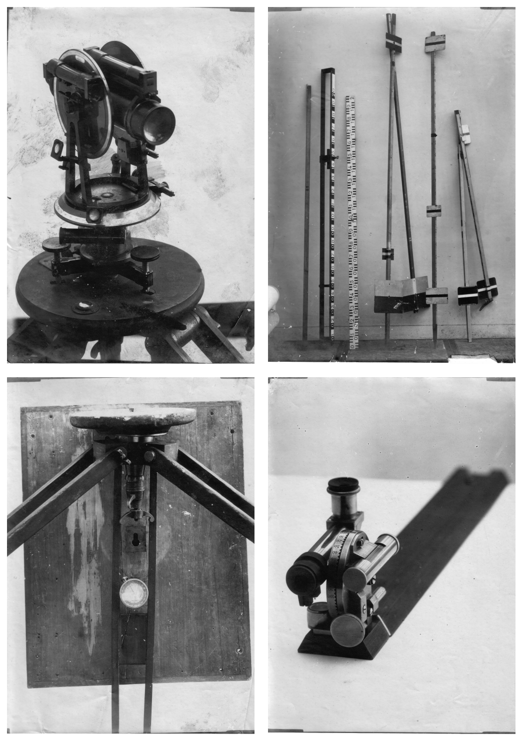


Figure 10: Instruments de topographie

- Trois pages intitulées *Sur la détermination des fractions de secondes de temps.*
- Un manuscrit de 15 pages avec le titre *Instructions pour l'exécution des nivellements de précision.* Il comporte 11 sections

I	Conditions des nivellements à effectuer en dehors des grandes voies de communication
II	Reconnaissance du tracé
III	Repèrements
IV	Repères fixes et provisoires
V	Installation de niveau
VI	Réglage du niveau
VII	Mires
VIII	Exécution d'une nivelée
IX	Tenue des carnets
X	Calculs à effectuer sur le terrain
XI	Calculs définitifs

- Un manuscrit de 8 pages intitulé *Équation de l'ellipsoïde terrestre rapportée à Ox tangente au parallèle vers l'Est, Oy tangente au méridien vers le Nord, Oz verticale vers le zénith.* Il en existe également un exemplaire à la machine à écrire dans lequel les formules mathématiques sont insérées à la main.

- Un manuscrit de 16 pages *Étude du développement conique conforme de la carte de Roumanie.* On en possède aussi un exemplaire tapé à la machine où les formules mathématiques sont insérées à la main.

- Un manuscrit de 3 pages *Instructions sur l'héliotrope-alidade (modèle d'étude 1905)*, écrit à La Charpenne le 18 août 1905.

- Cinq pages de description de l'alidade holométrique.

- Cinq pages de description de la boussole-éclimètre.

- Trois pages et trois plans sur la construction de lignes de chemin de fer.

- Trois pages intitulées *Remarque au sujet du calcul de correction de mire.*

- Divers cours et feuilles d'exercices destinés aux élèves par correspondance de l'ESTP.

- Deux feuilles avec le titre *Compléments de Topographie. Levés d'études à la planchette. 5 séries et 2 exercices pratiques. Tâches à remplir.* Ce document présente les idées de Cholesky sur le programme des études d'un cours de levés d'études à la planchette qu'il a donné à l'ESTP et que nous n'avons pas retrouvé (peut-être a-t'il été entièrement inclus dans son *Cours de Topographie*). Il se termine par

  > *Recommandation très importante.* *L'élève se tromperait beaucoup s'il croyait trouver dans les cours qu'il a entre les mains les solutions complètes des exercices qui lui sont proposés. Ces exercices ont pour but principal de le forcer à réfléchir, de l'empêcher d'apprendre ses cours trop strictement, en lui indiquant que dans*

un travail aussi complexe qu'un levé topographique, tout dépend de la valeur de l'opérateur qui doit par suite être habitué à raisonner toutes ses opérations. Aussi l'élève aura-t-il souvent avantage, lorsqu'il sera arrêté par un exercice à abandonner l'étude du cours et à chercher simplement si le bon sens ne lui indiquera pas la solution. Les exercices corrigés constitueront un complément indispensable du cours, et non pas une répétition; aussi l'élève ne devra-t-il pas se décourager s'il rencontre des difficultés sérieuses dans les exercices qui lui sont proposés. Qu'il montre qu'il sait réfléchir, on ne lui en demandera pas davantage.

Il n'y a rien à ajouter !

Appendice 1

Soient a, b et c les côtés d'un triangle et A, B et C les angles qui leur sont respectivement opposés. Les relations fondamentales suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned}
&A + B + C = \pi \\
&a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C \\
&a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
&(a+b)/(a-b) = \tan((A+B)/2)/\tan((A-B)/2).
\end{aligned}$$

Résoudre un triangle consiste, à partir de trois éléments, à calculer les trois autres. La longueur d'un côté doit toujours figurer parmi ces trois éléments. On a

Données	Calcul des autres éléments
a, A, B	$C = \pi - A - B, \quad b = a\sin B/\sin A, \quad c = a\sin C/\sin A$
a, b, C	$\tan(A-B)/2 = (a-b)/(a+b)\cot C/2, \quad (A+B)/2 = (\pi - C)/2$ Ayant obtenu $A+B$ et $A-B$, on en déduit A et B $c = a\sin C/\sin A$
a, b, A	$\sin B = b\sin A/a$ Si $a \geq b$, $B < \pi/2$ ne peut prendre qu'une seule valeur. Si $a < b$, trois cas sont possibles: 1 - si $b\sin A < a$, B peut prendre 2 valeurs ($B_2 = \pi - B_1$), 2 - si $b\sin A = a$, $B = \pi/2$, 3 - si $b\sin A > a$, le triangle est impossible. $C = \pi - A - B, \quad c = a\sin C/\sin A$
a, b, c	$r = [(p-a)(p-b)(p-c)/p]^{1/2}$ avec $p = (a+b+c)/2$ $\tan A/2 = r/(p-a), \quad \tan B/2 = r/(p-b), \quad \tan C/2 = r/(p-c)$

La hauteur h sur le côté a (menée à partir de A) est

$$h = b\sin C = c\sin B.$$

Signalons qu'en géodésie on mesure les angles non pas en degrés, comme en trigonométrie, ou en radians, comme en mathématiques, mais en *grades*, aussi appelés *gons*. Le cercle est divisé en 400 gons au lieu de 360 degrés.

Pour un triangle sphérique, la somme des angles est toujours supérieure à π. Des relations existent pour résoudre les triangles sphériques. Nous ne les donnerons pas ici.

Appendice 2

Expliquons comment se présente la méthode des moindres carrés dans son application à la compensation des réseaux (voir [17] et, pour des détails mathématiques plus poussés, [42]).

Supposons que l'on ait effectué n mesures $l_1, \ldots, l_n$, éventuellement réduites à la représentation plane. Ce sont, en général, des mesures d'angle ou de distance. On veut compenser ces mesures, c'est-à-dire corriger les erreurs dont elles peuvent être affectées à cause de la précision des instruments et des inexactitudes expérimentales. Les inconnues $X_1, \ldots, X_N$ sont les coordonnées Lambert des nouveaux points. Les mesures l_i sont, en l'absence d'erreurs, reliées aux inconnues par des relations de la forme

$$l_i = f_i(X_1, \ldots, X_N), \quad i = 1, \ldots, n,$$

où les f_i sont les fonctions non linéaires. Soit v_i l'estimation de l'erreur sur la mesure l_i. Ce sont des variables aléatoires qui suivent une loi de Gauss normale centrée. On a donc, en fait, les *relations d'observation*

$$l_i + v_i = f_i(X_1, \ldots, X_N), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

C'est un système non linéaire de n équations à $N + n$ inconnues $X_1, \ldots, X_N$ et $v_1, \ldots, v_n$. Il faut commencer par le rendre linéaire.

Soient $l_i^* = f_i(X_1^*, \ldots, X_N^*)$ les mesures calculées pour des valeurs approchées X_i^* des inconnues. Ces valeurs approchées sont obtenues par un moyen adéquat quelconque, en utilisant seulement une partie des mesures. Par exemple, pour compenser un réseau de cinq points, on n'utilisera que trois mesures et la solution obtenue servira de solution approchée. Pour linéariser le système (1), on effectue un développement de Taylor au premier ordre des fonctions f_i, ce qui donne

$$l_i - l_i^* + v_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_1^*}(X_1 - X_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial X_N^*}(X_N - X_N^*), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Soit $x_i = X_i - X_i^*$ la *correction de compensation*. En notant A la matrice de coefficients $a_{ij} = \partial f_i / \partial X_j^*$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, N$, b le vecteur de composantes $l_i - l_i^*$ pour $i = 1, \ldots, n$, x celui de composantes x_i pour $i = 1, \ldots, N$ et v celui de composantes v_i pour $i = 1, \ldots, n$, le système (2) s'écrit

$$Ax = b + v. \tag{3}$$

Nous allons voir comment le résoudre par la *méthode des moindres carrés*.

Chaque mesure l_i est une variable aléatoire caractérisée par son *écart-type* σ_i. Le nombre $p_i = 1/\sigma_i^2$ est le *poids* de cette mesure. On démontre que les résidus v_i sont des variables aléatoires normales centrées et indépendantes et que la solution la plus probable du système des relations d'observation (3) est celle qui minimise la quantité

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2.$$

C'est la condition des *moindres carrés*.

Cette quantité est la plus petite possible quand ses dérivées partielles par rapport aux x_j sont toutes nulles. On a

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j}.$$

Or $\partial v_i^2/\partial x_j = 2v_i\ \partial v_i/\partial x_j$. D'après (3), on a $\partial v_i/\partial x_j = a_{ij}$ et la condition des moindres carrés entraîne donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i v_i = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Si l'on appelle P la matrice diagonale d'éléments $p_1, \ldots, p_n$, cette condition s'écrit

$$A^T P v = 0.$$

C'est un système de N équations à n inconnues et l'on obtient donc finalement un système de $N + n$ équations avec autant d'inconnues

$$\begin{cases} A^T P v = 0 \\ Ax - v = b. \end{cases}$$

Mais $v = Ax - b$ et, en remplaçant dans le premier système, on trouve

$$A^T P A x = A^T P b.$$

Ce système, dit des *équations normales*, ne contient plus que les inconnues x. Il est de dimension N et sa matrice est symétrique définie positive puisque les poids p_i sont positifs. C'est ce système que l'on résout par la méthode de Cholesky.

Remerciements: Je remercie le Professeur Jean Meinguet, de l'Université Catholique de Louvain-La-Neuve, Belgique, qui fut le premier à me fournir des indications biographiques sur Cholesky. Je suis reconnaissant à Alain Vienne, de l'Observatoire de Lille, qui a bien voulu me procurer l'article de Banachiewicz. Je remercie Monsieur Roger Serre, Ingénieur en Chef Géographe, Professeur à l'École Nationale des Sciences Géographiques, pour les documents qu'il m'a transmis et les indications qu'il m'a données. Je dois des remerciements très sincères à Olga Taussky-Todd et à John Todd pour les échanges que nous avons eus au cours des années et pour avoir bien voulu me communiquer tous les renseignements en leur possession. Enfin, sans la maîtrise de Michela Redivo Zaglia, Professeur à l'Université de Padoue, Italie, il m'aurait été impossible de dénicher certaines informations sur le web. Qu'elle en soit remerciée.

Références

[1] Rapport sur les opérations du nivellement de précision d'Algérie et de Tunisie pendant les campagnes 1910-1911, 1911-1912, 1912-1913 par le Capitaine Cholesky, Cahiers du Service Géographique de l'Armée, n. 35, 1913.

[2] Rapport sur les travaux effectués en 1912, Cahiers du Service Géographique de l'Armée, n. 36, 1913.

[3] R. Adrain, Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations, Analyst or Math. Museum, 1 (1808) 93-109.

[4] R. Adrain, Investigation of the figure of the earth and of the gravity in different latitudes, Trans. Amer. Phil. Soc., 1 (1818)

[5] R. Adrain, Research concerning the mean diameter of the earth, Trans. Amer. Phil. Soc.,

[6] A.C. Aitken, On the evaluation of determinants, the formation of their adjugates and the practical solution of simultaneous linear equations, Proc. Edinburgh Math. Soc., 3 (1932) 207-219.

[7] T. Banachiewicz, Principes d'une nouvelle technique de la méthode des moindres carrés; Méthode de résolution numérique des équations linéaires, du calcul des déterminants et des inverses et de réduction des formes quadratiques, Bull. Inter. Acad. Polon. Sci., Sér. A, (1938) 393-404.

[8] T. Banachiewicz, Études d'analyse pratique, Cracow Observatory Reprint 22, University of Cracow, 1938.

[9] Cdt. Benoît, Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un système d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues, (Procédé du Commandant Cholesky), Bulletin Géodésique, 2 (1924) 67-77.

[10] Å. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[11] J.-L. Chabert et al., *Histoires d'Algorithmes*, Belin, Paris, 1994.

[12] A. Cholesky, Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires, Manuscrit, Fonds A. Cholesky, Archives de l'École Polytechnique, Palaiseau.

[13] A. Cholesky, *Cours de Topographie. 2è Partie, Topographie Générale*, École Spéciale des Travaux Publics, Paris, 7è édition, 1937.

[14] P.D. Crout, A short method for evaluating determinants and solving systems of linear equations with real or complex coefficients, Trans. Amer. Institute Elec. Eng., 60 (1941) 1235-1240.

[15] P.D. Crout, A short method for evaluating determinants and solving systems of linear equations with real or complex coefficients, Marchant Methods MM-182, Sept. 1941, Marchant Calculating Machine Co., Oakland, California.

[16] M.H. Doolittle, Method employed in the solution of normal equations and the adjustment of a triangulation, U.S. Coast and Geodetic Survey Report, 1878, pp. 115-120.

[17] H. Duquenne, *Méthode des Moindres Carrés. Application aux Travaux de Géodésie*, Cours Polycopié, Institut Géographique national, École Nationale des Sciences Géographiques, 1986.

[18] P.S. Dwyer, The Doolittle technique, Ann. Math. Stat., 12 (1941) 449-458.

[19] P.S. Dwyer, The solution of simultaneous equations, Psychometrika, 6 (1941) 101-129.

[20] P.S. Dwyer, A matrix presentation of least squares and correlation theory with matrix justification of improved methods of solution, Ann. Math. Stat., 15 (1944) 82-89.

[21] P.S. Dwyer, *Linear Computations*, Wiley, New York, 1951.

[22] L. Eyrolles, E. Prévot, E. Quanon, *Cours de Topographie. Livre I: Topométrie*, Librairie de l'Enseignement Technique Léon Eyrolles, Paris, 1909.

[23] L. Fox, H.D. Huskey, J.H. Wilkinson, Notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1 (1948) 149-173.

[24] C.F. Gauss, *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Solem Ambientiem*, Hambourg, 1809; Œuvres, t. VII, 1871; traduction française par E. Dubois, Paris, 1864.

[25] C.F. Gauss, Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809, Soc. Roy. Sci. Göttingen, 1810; Œuvres, t. VI, 1874, pp. 3-24.

[26] C.F. Gauss, Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, deuxième partie, Soc. Roy. Sci. Göttingen, 1823; Œuvres, t. IV, 1873, pp. 1-108; traduction française par J. Bertrand, *Méthode des Moindres Carrés*, Paris, 1855.

[27] H.H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[28] P. Goix, *Topographie*, CRDP de l'Académie de Grenoble, Greboble, 2001.

[29] D. Guedj, *Le Mètre du Monde*, Éditions du Seuil, Paris, 2000.

[30] F.R. Helmert, *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode des kleinsten Quadrate mit Anwendung auf die Geodäsie und die Theori der Messinstrumente*, 1907.

[31] H. Hotelling, Some new methods in matrix calculations, Ann. Math. Stat., 14 (1943) 1-34.

[32] C.G.J. Jacobi, Über eine elementare Transformation eines in Buzug jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks, J. Reine Angew. Math., 53 (1857) 265-270.

[33] H. Jensen, An attempt at a systematic classification of some methods for the solution of normal equations, Geodaetisk Institut Kobenhan, Meddelelse no. 18, 1944, 45 pp.

[34] W. Jordan, *Handbuch der Vermessungskunde*, 1873.

[35] A.N. Kolmogorov, A.P. Yushkevich, eds., *Mathematics of the 19th Century. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Birkhäuser, Basel, 1992.

[36] C. Lallemand, *Compensation d'un Réseau de Nivellements par la Méthode des Coefficients Indéterminés*, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Éditeur, Paris & Liège, 1912.

[37] A.M. Legendre, *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*, Paris, 1805.

[38] J. Meinguet, Refined error analysis of Cholesky factorization, SIAM J. Numer. Anal., 20 (1983) 1243-1250.

[39] P. Merlin, *La Topographie*, Collection Que-Sais-Je?, vol. 744, 2è éd., Presses Universitaires de France, Paris, 1972.

[40] M. d'Ocagne, *Vue d'Ensemble sur les Machines à Calculer*, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1922.

[41] P. Pizzetti, H. Noirel, Géodésie, dans *Encyclopdédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, Édition Française, J. Molk et Ch. Lallemand éds., Tome VI, Volume 1, Gauthier-Villars et Cie, Paris et B.G. Teubner, Leipzig, 1916, rééedition par Jacques Gabay, Paris, 1993.

[42] R. Serre, *Compensation par Moindres Carrés*, Cours Polycopié, Institut Géographique national, École Nationale des Sciences Géographiques, 2000.

[43] W. De Sitter, Determination of the mass of Jupiter and elements of the orbits of its satellites from observations made with the Cape heliometer by Sir David Gill, K.C.B., and W.H. Finlay, M.A., Ann. Cape Observatory, vol. XII, part I, 1915.

[44] G.W. Stewart, Gauss, statistics, and Gaussian elimination, dans *Computing Science and Statistics: Computationally Intensive Statistical Methods*, J. Sall and A. Lehman eds., Interface Foundation of North America, Fairfax Station, VA, 1994, pp. 1-7.

[45] G.W. Stewart, *Matrix Algorithms. Volume I: Basic Decompositions*, SIAM, Philadelphia, 1998.

[46] O. Taussky, J. Todd, Cholesky, Toeplitz and the triangular factorization of symmetric matrices, non publié (avec la courtoisie des auteurs).

[47] J. Todd, The prehistory and early history of computation at the U.S. National Bureau of Standards, dans *A History of Scientific Computing*, S.G. Nash ed., Addison-Wesley, Reading, 1990, pp. 251-268.

[48] O. Toeplitz, Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., II (1907) 101-110.

[49] A.M. Turing, Rounding-off errors in matrix processes, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1 (1948) 287-308.

[50] F.V. Waugh, A simplified method of determining multiple regression constants, J. Amer. Stat. Ass., 30 (1935) 694-700.