



# **Systemes de Référence Terrestres: Définition et Réalisation**

---

**Zuheir Altamimi**

**Institut Géographique National, FRANCE**

**Laboratoire de Recherche en Géodésie**

*<http://lareg.ensg.ign.fr/ITRF/>*

*e-mail: [altamimi@ensg.ign.fr](mailto:altamimi@ensg.ign.fr)*

---



## Plan

- **Systèmes de référence terrestres: Concepts Théoriques**
- **Réalisations par:**
  - **Les Techniques de géodésie spatiale**
  - **Combinaison (Modèle CATREF)**
- **Définition d'un Repère de Référence Terrestre (RRT)**
- **Défaut de rang et contraintes minimales**
- **ITRS/ITRF - ITRF2000 - Futur**
- **Comment exprimer une solution GPS dans l'ITRF ?**
- **Combinaison de séries temporelles de positions de stations**



## Systeme de Référence Terrestre (SRT)

- **Définition Théorique (Idéale), pas d'existence physique**
- **Modèle mathématique pour une Terre physique**

**Repère affine  $(O, E)$  défini dans un espace Euclidien de dimension 3, avec:**

- **$O$ : Point de l'espace (Origine)**
- **$E$ : Base de vecteurs orthogonaux**
- **Vecteurs unitaires co-linéaires à la base (Orientation)**
- **Unité de longueur (Echelle:  $\lambda$ ):**  $\lambda = \|\vec{E}_i\|_{i=1,2,3}$

$$\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \lambda^2 \delta_{ij}, \quad (\delta_{ij} = 1, i = j)$$



## Transformation générale entre 2 SRT

**Similitude Euclidienne**  
à 7 paramètres:

$$X_2 = T + \lambda \cdot \mathcal{R} \cdot X_1$$

**Translation**  $T = (T_x, T_y, T_z)^T$

**Facteur d'échelle**  $\lambda$

**Rotation**  $\mathcal{R} = R_x \cdot R_y \cdot R_z$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R1 & \sin R1 \\ 0 & -\sin R1 & \cos R1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos R2 & 0 & -\sin R2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R2 & 0 & \cos R2 \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos R3 & \sin R3 & 0 \\ -\sin R3 & \cos R3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Repère de Référence Terrestre (RRT)

- réalisation ou matérialisation physique du SRT
- accessible aux utilisateurs

Un ensemble de points avec leur coordonnées, exprimées à la fois dans le SRT et le RRT.

**Définition du RRT:** spécifier son origine, échelle, orientation et son évolution temporelle

**Système de coordonnées:** Cartésiennes (X,Y,Z), Géographiques (ellipsoïdales) ( $\lambda, \phi, h$ ), etc.



## Transformation entre 2 RRT

A partir de la forme générale:  $X_2 = T + \lambda.\mathcal{R}.X_1$

en géodésie spatiale on utilise la forme linéarisée:

$$X_2 = X_1 + T + DX_1 + R.X_1$$

avec:  $T = (T_x, T_y, T_z)^T$ ,  $\lambda = (1 + D)$ , et  $\mathcal{R} = (I + R)$

où  $R = \begin{pmatrix} 0 & -R3 & R2 \\ R3 & 0 & -R1 \\ -R2 & R1 & 0 \end{pmatrix}$

**Car:**

$T$  est de l'ordre de qq 100 mètres.  $D$  et  $R$  sont de l'ordre de  $10^{-5}$

Les termes de 2ème ordre sont négligés et sont de l'ordre de  $10^{-10}$

$\approx 0.6$  mm.



## Estimation des 7 paramètres de Transfo. entre 2 RRT

Données :  $X_1 (\Sigma_1), X_2 (\Sigma_2)$

$$X_2 = X_1 + A\theta$$

$$\theta = (A^T P A)^{-1} A^T P (X_2 - X_1)$$

**Pondération  $P$ :**

- **Matrice Identité**  $\implies \theta = (A^T A)^{-1} A^T (X_2 - X_1)$
- **Matrice diagonale :**  $P = \left( \sum_i \Sigma_i^D \right)^{-1}$
- **Matrice Complète :**  $P = \left( \sum_i \Sigma_i \right)^{-1}$

**Remarque:**  $X_1, X_2$  et  $\theta$  sont (doivent être) à la même époque



$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & x_a^i & 0 & z_a^i & -y_a^i \\ 0 & 1 & 0 & y_a^i & -z_a^i & 0 & x_a^i \\ 0 & 0 & 1 & z_a^i & y_a^i & -x_a^i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ D \\ R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$$





## Position instantanée d'un point sur la croûte terrestre

$$X(t) = X_0 + \dot{X} \times (t - t_0) + \sum_i \Delta X_i(t)$$

$\dot{X}$  : Vitesse linéaire due au mouvement des plaques tectoniques

Correction diverses  $\sum_i \Delta X_i(t)$ :

- Marées terrestres :  $\approx 30$  cm
- Surcharges Océaniques: qq cm
- Pression atmosphérique : qq mm
- Mouvement du Géocentre: qq mm , périodique et séculaire
- ...



## Réalisation d'un SRT en géodésie spatiale

- En traitant les observations d'une ou plusieurs techniques
- En combinant des RRT fournis par différentes techniques:

$$X_s = X_c + T_s + D_s \cdot X_c + R_s \cdot X_c$$

**Estimation de  $X_c, T_s, D_s, R_s$  par moindres carrés.**



## Définition du RRT

$$X_2 = X_1 + T + DX_1 + R.X_1 \quad (1)$$

Supposant des vitesses constantes et en différenciant l'Eq. (1) par rapport au temps:

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 + \dot{T} + \overbrace{D\dot{X}_1}^{\approx 0} + \dot{D}X_1 + \overbrace{R\dot{X}_1}^{\approx 0} + \dot{R}X_1 \quad (2)$$

$$\dot{T} = \begin{pmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{R}_3 & \dot{R}_2 \\ \dot{R}_3 & 0 & -\dot{R}_1 \\ -\dot{R}_2 & \dot{R}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

=> 14 degrés de liberté pour définir un RRT.



## Définition du RRT

### Comment choisir les 14 paramètres ?

<b>Origine :</b>	<b>Centre des masses (Techniques Dynamiques)</b>
<b>Echelle:</b>	<b>Depend d'un certain nb. de paramètres physiques</b>
<b>Orientation:</b>	<b>Conventionnelle</b>
<b>Evolution tempo.</b>	<b>Conventionnelle: Sens Géophysique</b>
<b>de l'orientation:</b>	<b>Mouvement des plaques Tectoniques</b>

Des contraintes supplémentaires sont nécessaires pour compléter la définition du RRT => **Défaut de rang** en termes d'équations normales:

- orientation (toutes les techniques): 3(6) paramètres
- origine (technique VLBI): 3(6) paramètres



## **Definition du RRT: Origine et Mouvement du Géocenter**

**Mouvement de translation du réseau des stations d'observation par rapport au Centre des Masses (CdM) dû à la redistribution des masses.**

- **Mouvement périodique et séculaire**
- **Les techniques Satellitaires ont une capacité limitée pour mesurer ce mouvement**
- **L'origine du RRT coïncide avec la position CdM, moyennée sur la période des observations utilisées.**
- **Les variations linéaires des composantes de l'origine sont "en théorie" dues au mouvement séculaire du géocentre**
- **Le mouvement périodique est plus facilement détectable par les techniques Satellitaires**



## Definition du RRT: Echelle

L'échelle entre RRT depends de:

- GM dans les techniques satellitaires
- Vitesse de la lumière  $c$
- Correction relativistes
- La Troposphère
- Effet spécifiques aux Techniques de mesures
  - "Effet d'antenne" VLBI, GPS, DORIS
  - Biais de télémétries SLR (Ranging bias)
- Mouvement vertical des stations



## **Evolution temporelles du RRT**

**Choisir une loi de variation temporelle des 7 paramètres du RRT**

- **Origine: tenir compte du mouvement du Géocentre**
- **Echelle: En théorie pas de sens physique**
- **Orientation: Condition de non rotation globale des mouvements horizontaux de la croûte terrestre (NNR)**  
**Tenir compte du mouvement des plaques tectoniques**



## Modèles de mouvement des plaques (1/2)

On s'intéresse à des vitesses de plaques, supposées rigides

- modèles relatifs de mouvements entre plaques basés sur des données géologiques et moyennés sur qq millions d'années
  - RM2 (Minster & Jordan, 1978)
  - NUVEL-1, NUVEL-1A (DeMets et al., 1990, 1994)
- modèles absolus basés sur les données des modèles relatifs:

Deux hypothèses:

1. les plaques (lithosphère) ayant un mouvement d'ensemble négligeable sur le manteau (la condition de non rotation: NNR)
2. des points chauds ayant des mouvements négligeables par rapport au manteau





## Modèles de mouvement des plaques (2/2)

**Dans les deux hypothèses:**

**UN pôle de rotation d'une seule plaque est estimé,  
les autres pôles sont déduits par addition de vecteurs**

**(1) Modèle NNR (AM0-2, NNR-NUVEL-1, NNR-NUVEL-1A):**

$$\omega_{PACIFIQUE} = -3/8\pi \sum_{p \in P} Q_p \Omega_p$$

**(2) Modèle Hot Spots: (AM1-2, HS2-NUVEL1) minimise  $\chi^2$  t.q.:**

$$\chi^2 = F(\dots, \omega_{plaque})$$

**Différence entre (1) & (2) est de l'ordre de 3 cm/an**



## Evolution temporelle de l'orientation

Quels RRT, modèle ou hypothèse faut-il choisir pour  $\dot{R}$  ?

- Adoption d'un modèle géophysique absolu (NNR ou HotSpot)
- Alignement à un modèle [ $\dot{R}$  (modèle - ITRF) = 0]
- IERS: "Consistance" entre ITRF, EOP, ICRF
- Condition de non rotation/translation:

Système d'axes de Tisserand:

$$\int_C V \, dm = 0 \quad \text{Translation (n'est plus nécessaire)}$$

$$\int_C X \times V \, dm = 0 \quad \text{Rotation}$$

Domaine d'intégration : la Croûte terrestre (sur des plaques ou des stations ?)



## Evolution temporelle de l'orientation : No-Net-Rotation Condition

La condition de non rotation globale (NNR) est la nullité du moment angulaire  $h$ , défini dans système d'axe de Tisserand et donné par:

$$h = \int_C X \times V dm = 0$$

Appliqué aux plaques tectoniques rigides donne:

$$h = \sum_{p \in P} Q_p \omega_p = 0$$

**NNR-NUVEL-1A** :  $\omega_{PACIFIC} = -3/8\pi \sum_{p \in P} Q_p \Omega_p$



## **Pourquoi la Condition NNR ?**

**La définition de l'ITRS:**

**"...the time evolution of the orientation is ensured by using a no-net-rotation condition with regards to horizontal tectonic motions over the whole Earth."**

**Le système d'axes de Tisserand:**

- Utilisé dans la théorie de la Rotation de la Terre**
- Minimise le mouvement global de la croûte terrestre qui affectera la détermination de la rotation de la Terre.**



## ITRF Orientation Time Evolution: Historical Background

ITRF	Velocity Field	Datum ( $\dot{R}$ )
ITRF88	AM0-2	AM0-2
ITRF89	AM0-2	AM0-2
ITRF91	Combined ( $\dot{X}$ )	// NNR-NUVEL-1
ITRF92	Combined ( $\dot{X}$ )	// NNR-NUVEL-1A
ITRF93	Combined ( $\dot{X}$ )	// EOP(IERS)
ITRF94	Combined [ $(X_{93} - X_{88})/5$ ]	// NNR-NUVEL-1A
ITRF96	Combined ( $X$ & $\dot{X}$ )	// ITRF94
ITRF97	Combined ( $X$ & $\dot{X}$ )	// ITRF96
ITRF2000	Combined ( $X$ & $\dot{X}$ )	// NNR-NUVEL-1A



## Modèles de mouvement des plaques et géodésie

On s'intéresse à des vitesses de points

A partir d'un champ de vitesses on estime des pôles de rotation par:

$$\dot{X} = \omega_p \times X$$

Les pôles de rotation  $\omega_p$  dépendent de la définition du RRT ou de l'hypothèse choisie (NNR, Hotspots...)



## Réalisation de SR par les techniques individuelles (1/2)

L'équation normale construite à partir des observations des techniques spatiales (supposée proprement réduite aux seules positions et vitesses des stations) s'écrit:

$$N.(\Delta X) = K$$

où  $\Delta X = X - X_{apr}$  (inconnues linéarisées)

C'est un système singulier: défaut de rang = nb. de paramètres du RRT non restitués par les observations:

- 3 (6) composantes de l'origine (VLBI)
- 3 (6) composantes de l'orientation (toutes les techniques)
- 3 composantes de l'orientation du RRC (VLBI)



## Réalisation de SR par les techniques individuelles (2/2)

**Des contraintes supplémentaires sont nécessaires:**

- **Contraintes fortes ( $\sigma \geq 10^{-10}$ ) m**
- **Contraintes détachables ( $\sigma \approx 10^{-5}$ ) m**
- **Contraintes lâches (loose) ( $\sigma \geq 1$ ) m**
- **Contraintes minimales (appliquées sur les paramètres du RRT et non pas sur les coordonnées de stations)**





## Définition du RRT / Contraintes Minimales (1/4)

L'approche des contraintes minimales est basée sur des travaux théoriques de plusieurs auteurs, depuis les années 70:

- Ajustement en réseau libre
- S-transformation
- Contraintes Minimales/Internes

### Objectifs:

- avoir la meilleure définition possible du RRT
- préserver la forme "géométrique" du réseau
- séparer le bruit de mesure (nature stochastique)  
des incertitudes sur les paramètres du RRT



## Définition du RRT / Contraintes minimale (2/4)

Le point de départ est la relation standard entre 2 RRT.

$$X_2 = X_1 + A\theta \quad (3)$$

$$X_i = (x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T$$

$$\theta = (T1, T2, T3, D, R1, R2, R3, \dot{T}1, \dot{T}2, \dot{T}3, \dot{D}, \dot{R}1, \dot{R}2, \dot{R}3)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & x_i^0 & 0 & z_i^0 & -y_i^0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & y_i^0 & -z_i^0 & 0 & x_i^0 & & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & z_i^0 & y_i^0 & -x_i^0 & 0 & & & & & & & \\ & & & & \approx 0 & & & & 1 & 0 & 0 & x_i^0 & 0 & z_i^0 & -y_i^0 \\ & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & y_i^0 & -z_i^0 & 0 & x_i^0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & z_i^0 & y_i^0 & -x_i^0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



## Définition du RRT / Contraintes minimale (3/4)

Sol. des moindres carrés de l'eq. (3):  $\theta = \overbrace{(A^T A)^{-1} A^T}^{\mathbf{B}} (X_2 - X_1)$

Utilisant  $B = (A^T A)^{-1} A^T$ , contenant toute l'info. nécessaire permettant de définir un RRT, on introduit une équation de contraintes minimales à  $\Sigma_\theta$  près, sous la forme:

$$B(X_2 - X_1) = 0 \quad (\Sigma_\theta) \quad (4)$$

et en termes équation normale, on a:

$$B^T \Sigma_\theta^{-1} B (X_2 - X_1) = 0$$

La matrice  $A$  est réduite aux seuls paramètres du RRT non réduits par les observations.



## Définition du RRT/ Contraintes Minimales (4/4)

L'équation normale non contraintes (supposée réduite aux seules positions/vitesses) s'écrit:

$$N_{nc}(\Delta X) = K \quad (5)$$

où  $\Delta X = X - X_{apr}$  (inconnues linéarisées)

En choisissant une solution de référence ( $X_R$ ), l'équation de contraintes minimales est sous la forme :

$$B^T \Sigma_\theta^{-1} B(\Delta X) = B^T \Sigma_\theta^{-1} B(X_R - X_{apr}) \quad (6)$$

En Cumulant (5) and (6), on a:

$$(N_{nc} + B^T \Sigma_\theta^{-1} B)(\Delta X) = K + B^T \Sigma_\theta^{-1} B(X_R - X_{apr})$$



## Réalisation par combinaison (Modèle C<sub>A</sub>T<sub>R</sub>E<sub>F</sub>)

**Entrée** : Positions  $X(t_s)$ , vitesses  $\dot{X}$ , [ERP(t), (t = jour)]

**Sortie** : Positions  $X(t_0)$ , vitesses  $\dot{X}$ , ERP(t),  
( $T_x, T_y, T_z, D, R_x, R_y, R_z, \dot{T}2, \dot{T}3, \dot{D}, \dot{R}1, \dot{R}2, \dot{R}3$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} X_s^i = X_{itr f}^i + (t_s^i - t_0) \dot{X}_{itr f}^i + T_k + D_k X_{itr f}^i + R_k X_{itr f}^i \\ \quad + (t_s^i - t_k) \left[ \dot{T}_k + \dot{D}_k X_{itr f}^i + \dot{R}_k X_{itr f}^i \right] \\ \dot{X}_s^i = \dot{X}_{itr f}^i + \dot{T}_k + \dot{D}_k X_{itr f}^i + \dot{R}_k X_{itr f}^i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_s^p = x^p + R2_k \\ y_s^p = y^p + R1_k \\ UT_s = UT - \frac{1}{f} R3_k \\ \dot{x}_s^p = \dot{x}^p + \dot{R}2_k \\ \dot{y}_s^p = \dot{y}^p + \dot{R}1_k \\ LOD_s = LOD + \frac{\Lambda_0}{f} \dot{R}3_k \end{array} \right.$$



## Le système International de Référence Terrestre (ITRS)

- **Origin:** Center of Mass of the whole Earth, including oceans and atmosphere
- **Unit of length:** meter SI: Scale consistent with TCG (Geocentric Coordinate Time)
- **Orientation:** consistent with BIH (Bureau International de l'Heure) orientation at 1984.0.
- **Orientation time evolution:** ensured by using a No-Net-Rotation-Condition w.r.t. horizontal tectonic motions over the whole Earth

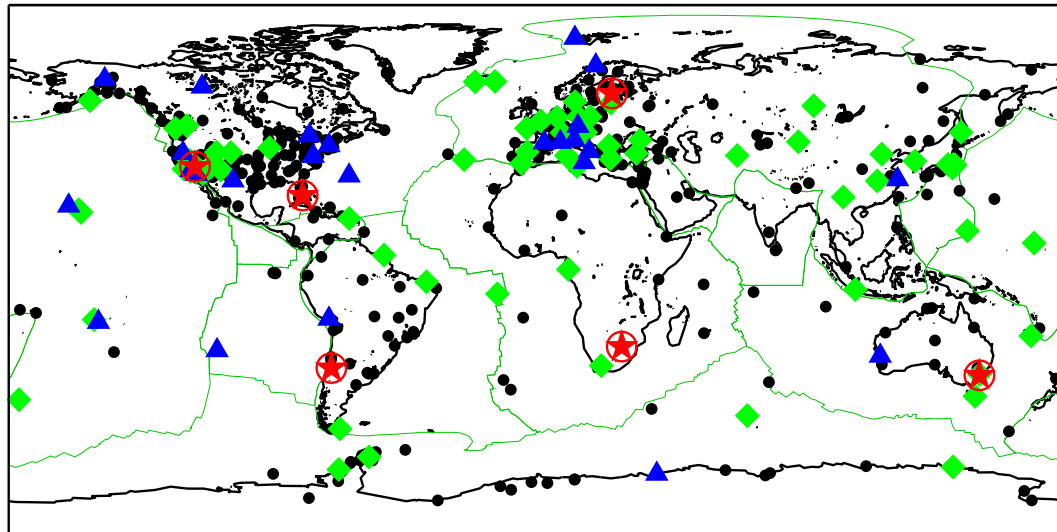


## **ITRF2000**

- **Combinaison de 30 SINEX (VLBI, LLR, SLR, GPS, DORIS)  
+ Rattachements**
- **Contraintes d'origine enlevées et remplacées par des contraintes minimales**
- **Origine: en fixant à zéro les translations entre l'ITRF2000 et une moyenne pondérée de 5 solutions SLR**
- **Echelle: en fixant à zéro les factors d'échelle entre l'ITRF2000 et une moyenne pondérée de 5 solutions SLR et 3 solutions VLBI**
- **Orientation: alignement sur l'ITRF97 à l'époque 1997.0 et au modèle NNR-NUVEL-1A**



## ITRF2000 and Collocation Sites



•1 Collocated techniques -> 70  
◆2  
▲3 25  
★4 6

### Local tie vectors:

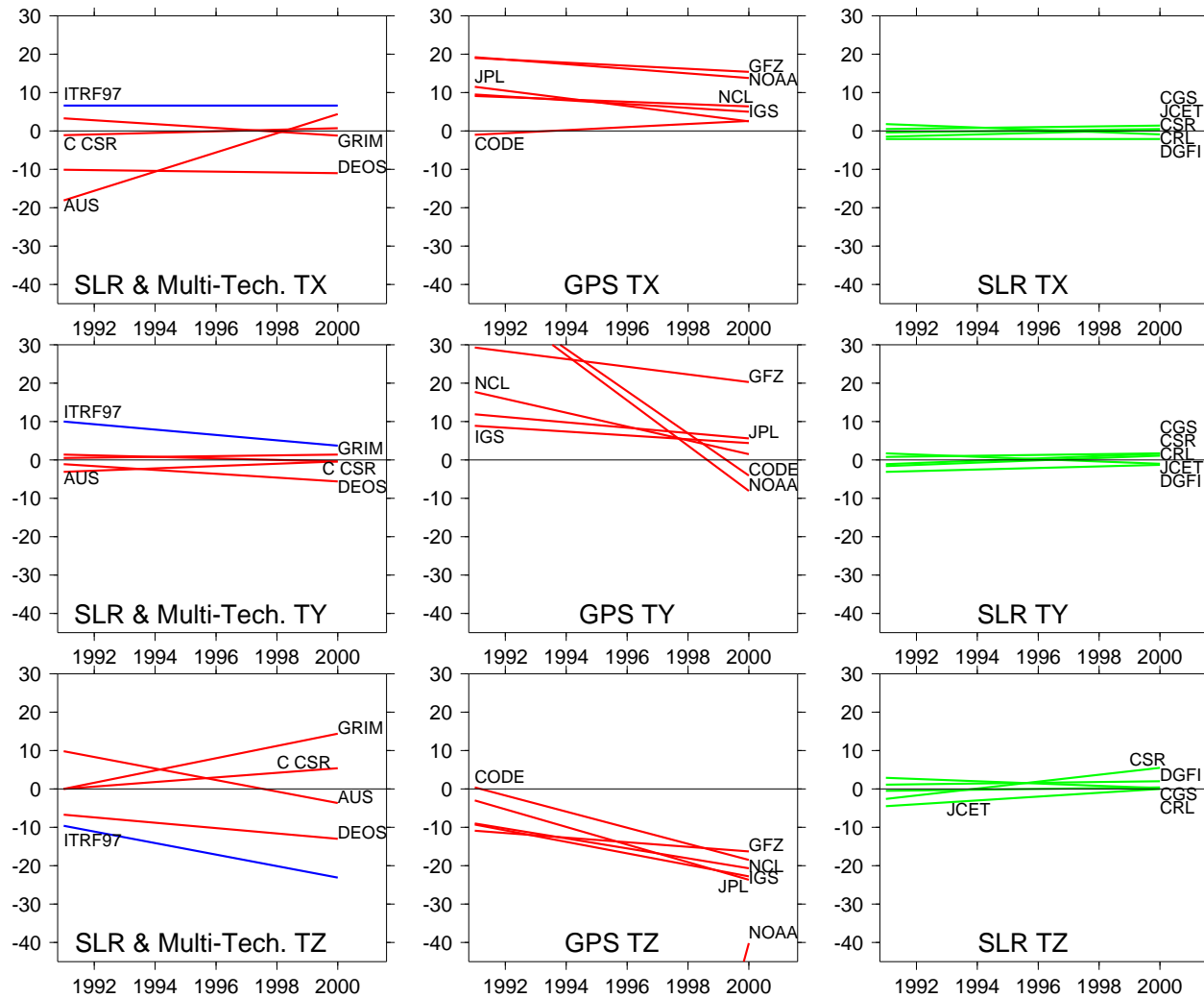
- 200 used
- 38 missing
- 20 "dubious"  
mostly in the  
vertical component

Local ties are used with proper variances.  
Dubious ties were deweighted.



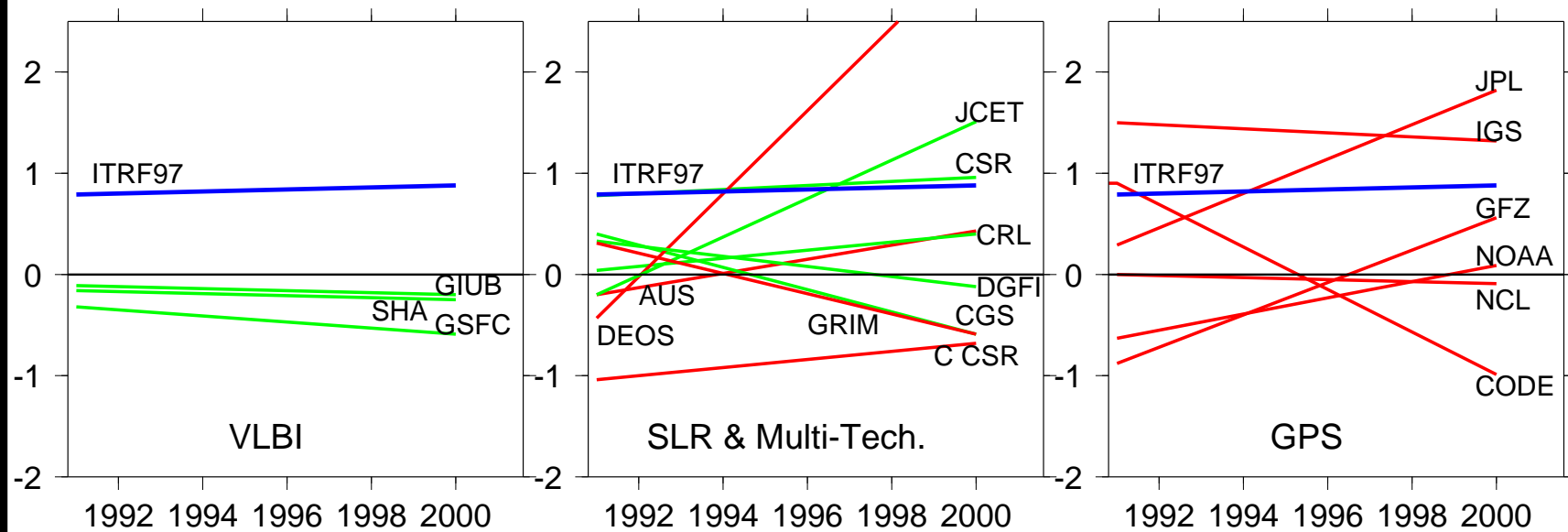


# ITRF2000: Translation Variations (mm)





## ITRF2000: Scale Variations (ppb = $10^{-9}$ )



(1 ppb  $\approx$  6 mm shift in station heights)



## Accuracy of ITRF2000 Scale & Origin & Long-term Stability

Parameter	WRMS (at 1997.0)	Over 10 years
$D$ (ppb)	0.2 ( $\approx$ 1.2 mm)	0.5 ( $\approx$ 3 mm)
$\dot{D}$ (ppb/y)	0.03 ( $\approx$ 0.2 mm/y)	
$T_x$ (mm)	0.4	1.4
$\dot{T}_x$ (mm/y)	0.1	
$T_y$ (mm)	0.5	1.5
$\dot{T}_y$ (mm/y)	0.1	
$T_z$ (mm)	0.9	3.9
$\dot{T}_z$ (mm/y)	0.3	

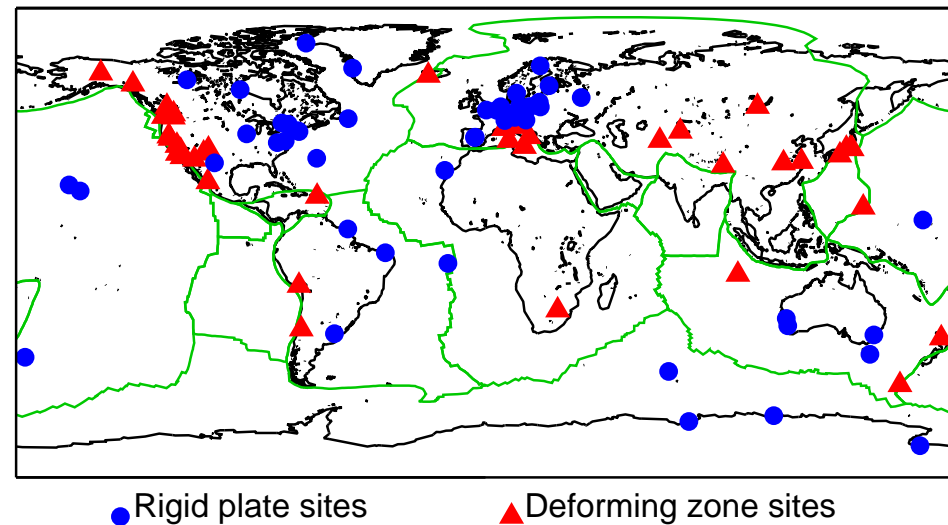


## ITRF2000 orientation & rate definition

- Orientation: ITRF97 at 1997.0 (1 mm)
  - Rate: NNR-NUVEL-1A (1 mm/y)
- Using a Datum Eq.:

$$B(X - X_0) = 0$$

$$B = (A^T A)^{-1} A^T$$
$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & z_a^i & -y_a^i \\ -z_a^i & 0 & x_a^i \\ y_a^i & -x_a^i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



- $X_0$ : Positions (ITRF97) or Velocities (NNR-NUVEL-1A)
- $X$ : Estimated Positions/Velocities

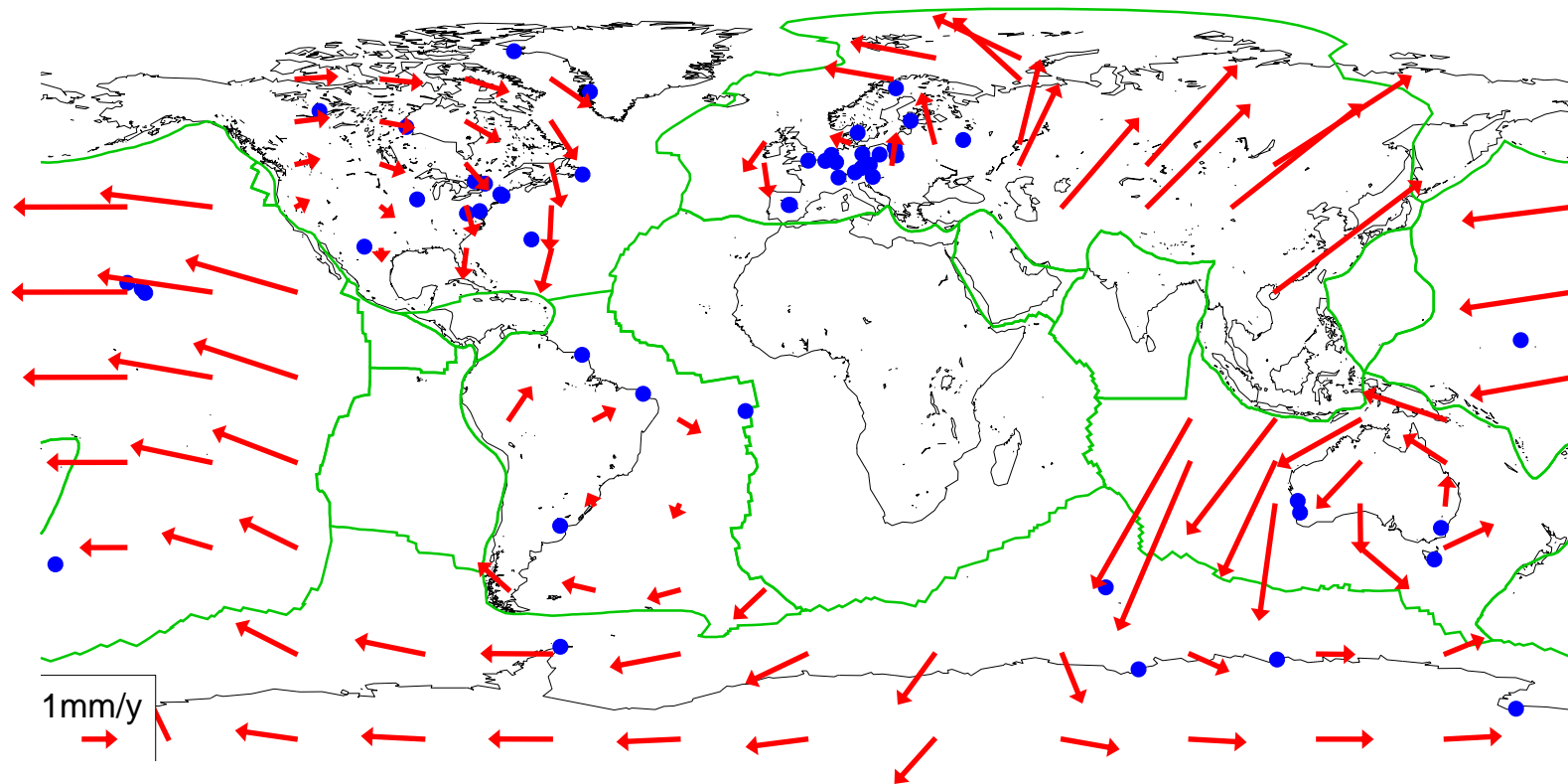


## ITRF2000: Relative Model

Pairs of plates	$\Delta$ (ITRF2000 - NUVEL-1A)				
	$\Omega$	$><$	$\Omega_N$ (deg./My)	$ \Omega - \Omega_N $	$\approx$ mm/y
PCFC-ANTA	0.882	>	0.870	0.025	0.7
PCFC-AUST	1.057	<	1.074	0.054	4.9
PCFC-EURA	0.919	>	0.859	0.083	6.9
PCFC-NOAM	0.755	>	0.749	0.036	2.2
PCFC-SOAM	0.658	>	0.637	0.041	3.9
NOAM-EURA	0.248	>	0.214	0.056	4.6



## Differences ITRF2000 - NNR-NUVEL-1A

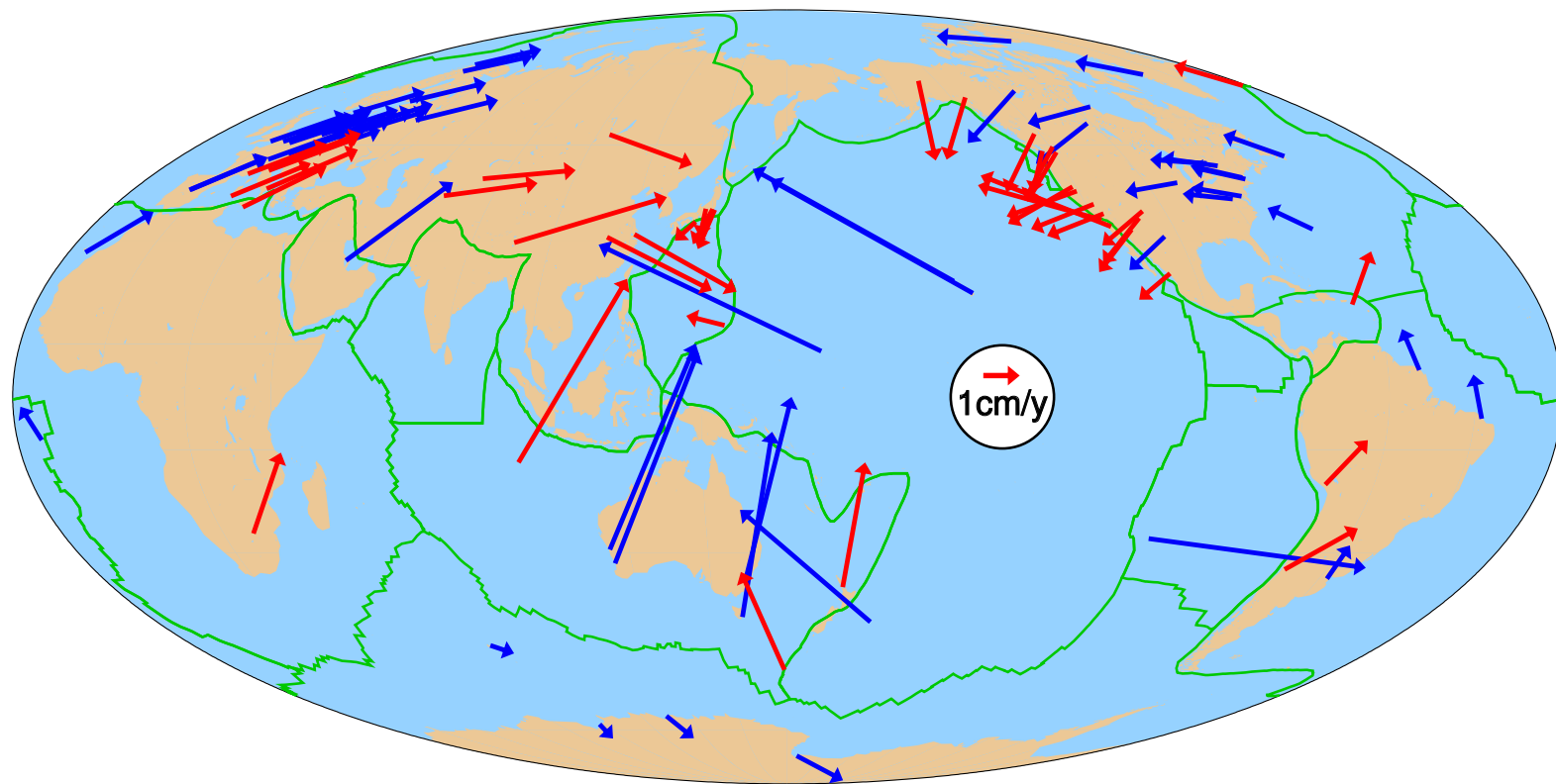




## ITRF2000 Horizontal Velocities

Uncertainties 1 mm/y

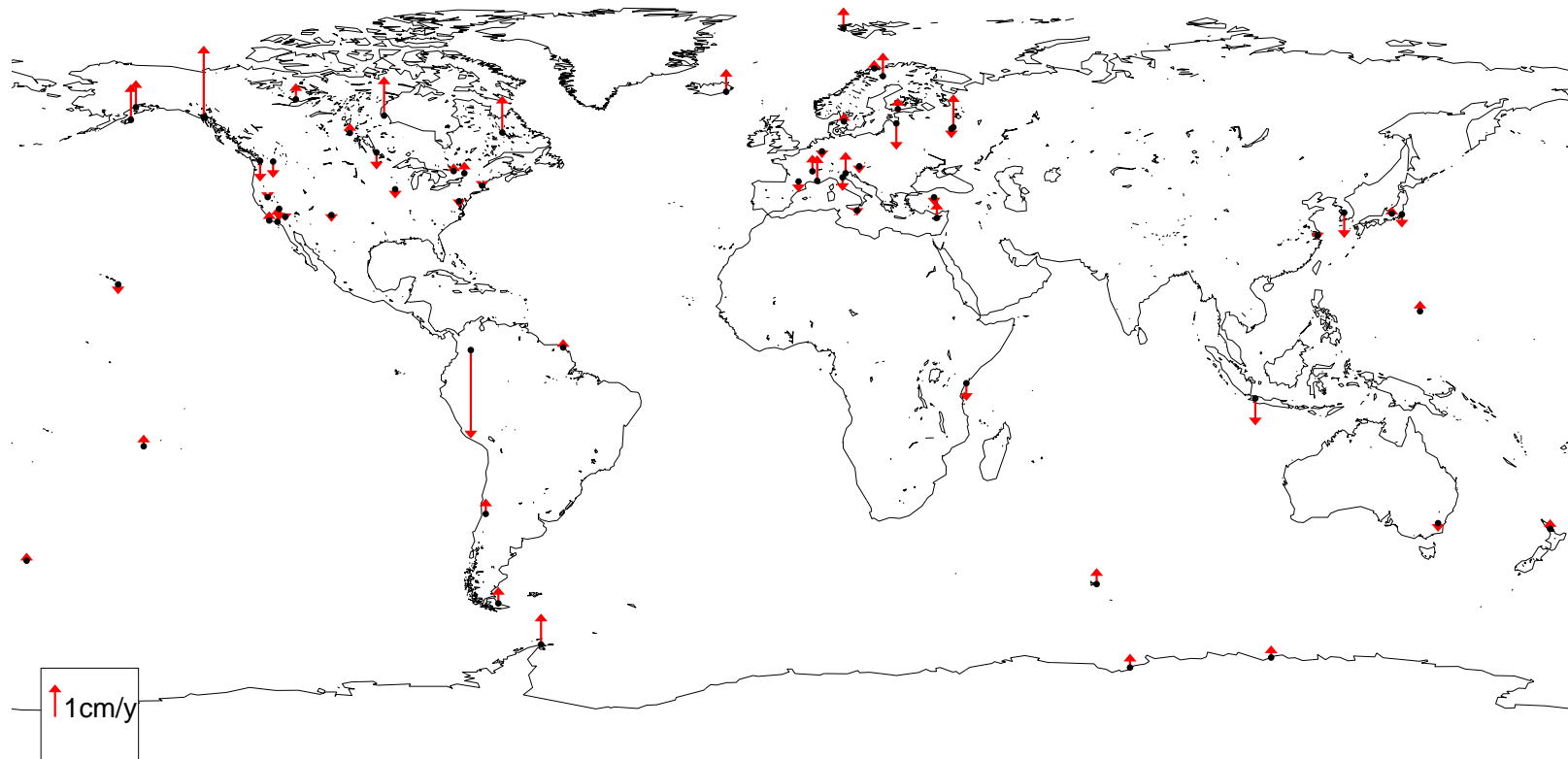
Blue: stable part of tectonic plates    Red: deforming zones





## ITRF2000 Vertical Velocities

ITRF2000 Vertical Velocities ( $> 3 \sigma$  and  $\sigma < 1\text{cm/y}$ )







## **Expression d'une solution GPS dans l'ITRF ? (1/3)**

- **En fixant l'orbite (pas suffisant car précis à 3-5 cm)**
- **En fixant des coordonnées aux valeurs ITRF (déconseillé)**
- **En utilisant une formule de transfo. à 7 param. (oui mais)**
- **En utilisant les équations de contraintes minimales (oui oui)**



## **Expression d'une solution GPS dans l'ITRF ? (2/3)**

### **Selection de stations ITRF de bonne qualité**

- **distribution optimale sur le réseau en question**
- **période d'observation suffisante (3 ans minimum)**
- **résidus ITRF  $< 5$  (10!) mm en positions et 3 mm/an en vitesses d'au moins 3 solutions différentes**



## **Expression d'une solution GPS dans l'ITRF ? (3/3)**

**En utilisant le sous ensemble des stations ITRF :**

- 1. Contraignant les coordonnées des stations sélectionnées ( $\sigma \approx 10^{-5}$  m) aux valeurs ITRF (procédure EUREF)**
- 2. Alignement par 7 paramètres de transformation**
  - Avantage de (1): la solution régionale est exprimée dans ITRF.**
  - Désavantage de (1): les coordonnées des stations sélectionnées sont entièrement déterminées par ITRF.**
  - (2) doit être utilisé avec précaution: l'effet de réseau peut biaiser ou produire des paramètres imprécis**
  - (2) si utilisé avec les équations de contraintes minimales, doit préserver les caractéristiques de la solution régionale d'origine**



## Alignement par les contraintes minimales (1/2)

La relation entre une solution régionale ( $X_R$ ) et l'ITRF ( $X_I$ ) sur les stations sélectionnées peut s'écrire sous la forme:

$$X_I = X_R + A\theta \quad (7)$$

Les moindres carrés donnent:

$$\theta = \overbrace{(A^T A)^{-1} A^T}^{\mathbf{B}} (X_I - X_R)$$

A fin d'exprimer  $X_R$  dans l'ITRF à  $\Sigma_\theta$  près,  
une équation de contraintes minimales peut s'écrire :

$$B(X_I - X_R) = 0 \quad (\Sigma_\theta) \quad (8)$$

et en termes d'équation normale:

$$B^T \Sigma_\theta^{-1} B (X_I - X_R) = 0$$



## Alignement par les contraintes minimales (2/2)

Le système d'équation normale d'une solution régionale peut s'écrire:

$$N_{nc}(\Delta X) = K \quad (9)$$

où  $\Delta X = X - X_{apr}$

$N_{nc}$  est inversible si l'orbite et les ERP sont fixés.

Mais pour exprimer  $X_R$  dans l'ITRF ( $X_I$ ), l'équation de CM est:

$$B^T \Sigma_\theta^{-1} B(\Delta X) = B^T \Sigma_\theta^{-1} B(X_I - X_{apr}) \quad (10)$$

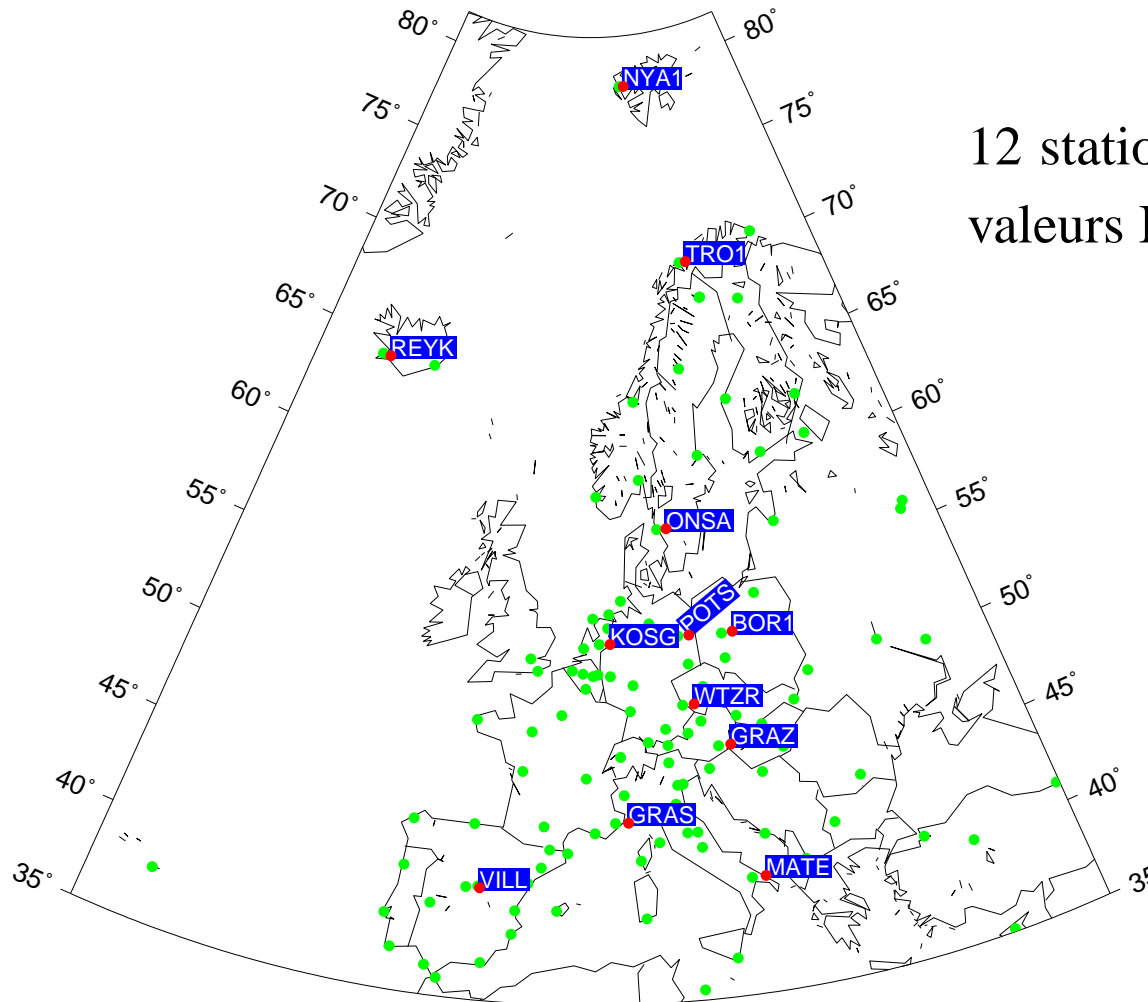
En cumulant (9) et (10) on a:

$$(N_{nc} + B^T \Sigma_\theta^{-1} B)(\Delta X) = K + B^T \Sigma_\theta^{-1} B(X_I - X_{apr})$$



## Application numérique

Solution combinée EUREF de la semaine 1149



12 stations sont contraintes aux valeurs ITRF2000 ( $\sigma = 10^{-5}$ )



## Estimation classique de 7 paramètres de transfo.

De ITRF2000 vers la solution EUREF dé-contrainte (12 Sta)

$T1$	$T2$	$T3$	$D$	$R1$	$R2$	$R3$
cm	cm	cm	$10^{-8}$	0.001"	0.001"	0.001"

### ajustement non pondéré

-16.60	-4.77	-23.00	.948	.117	-.149	-.027
± .44	0.83	.40	.061	.244	.148	.179

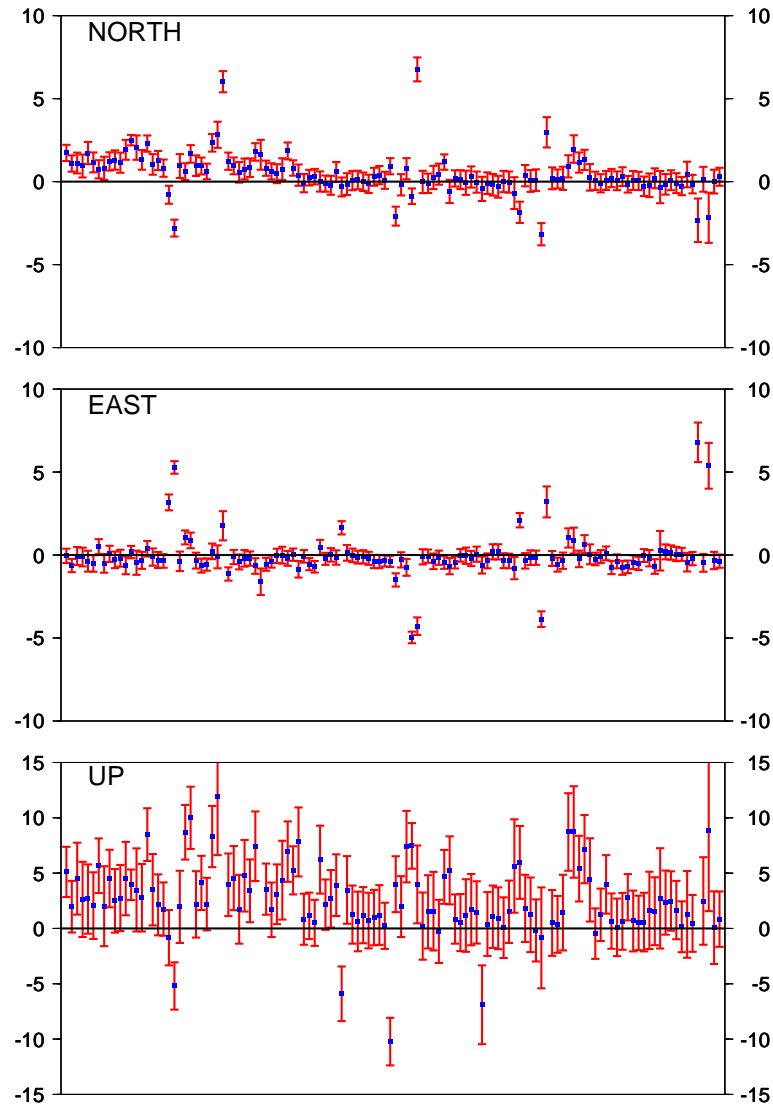
### ajustement pondéré

-16.36	-3.75	-23.11	.922	.412	-.225	-.186
± .66	1.08	.42	.045	.306	.236	.201



## Diff. (Unconst'd & transformed) *minus* Constrained

### Unweighted Transformation

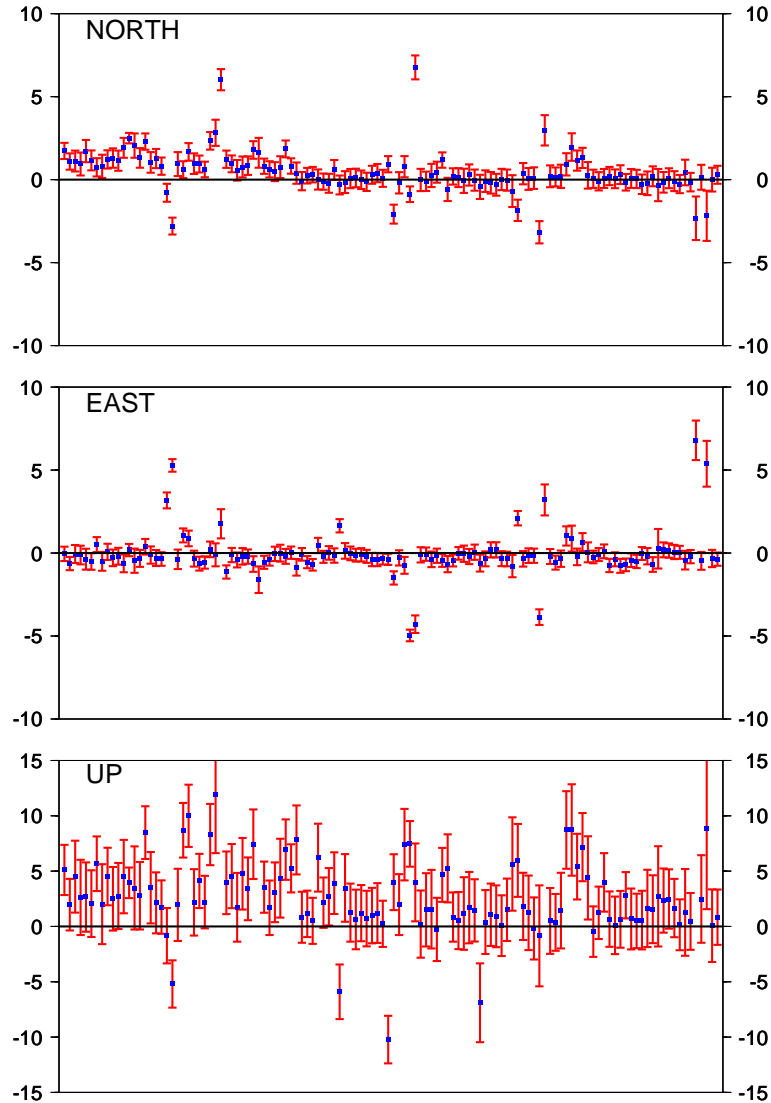




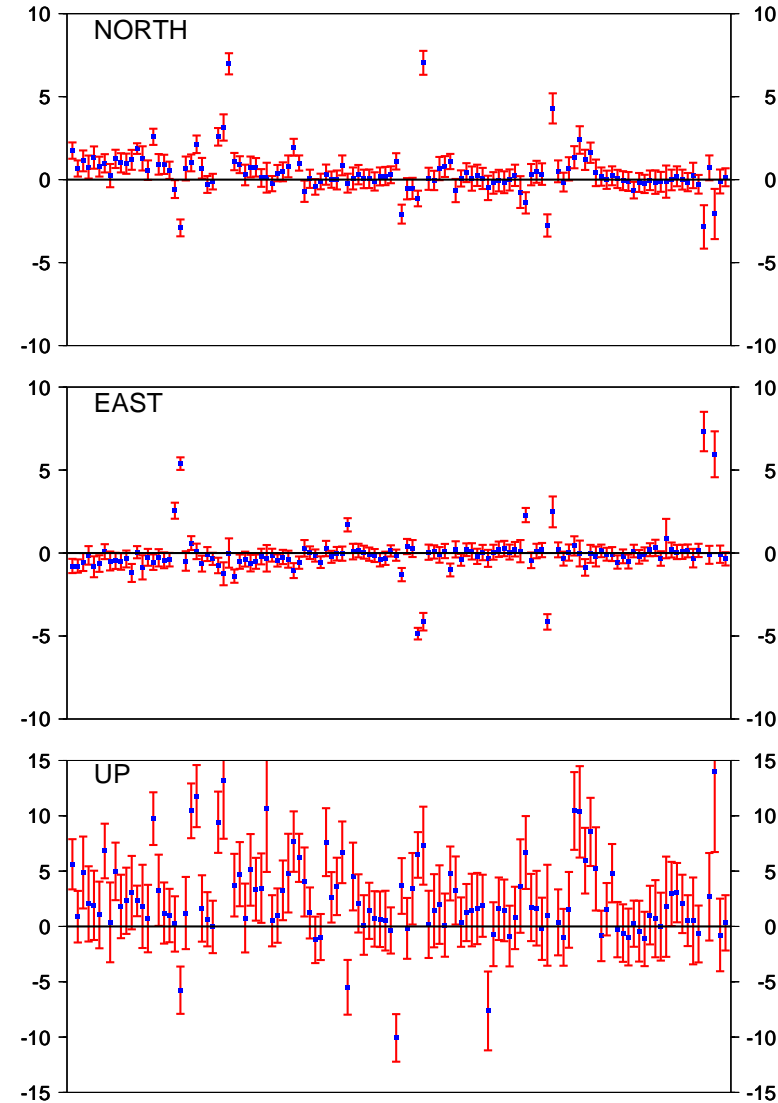


## Diff. (Unconst'd & transformed) *minus* Constrained

### Unweighted Transformation



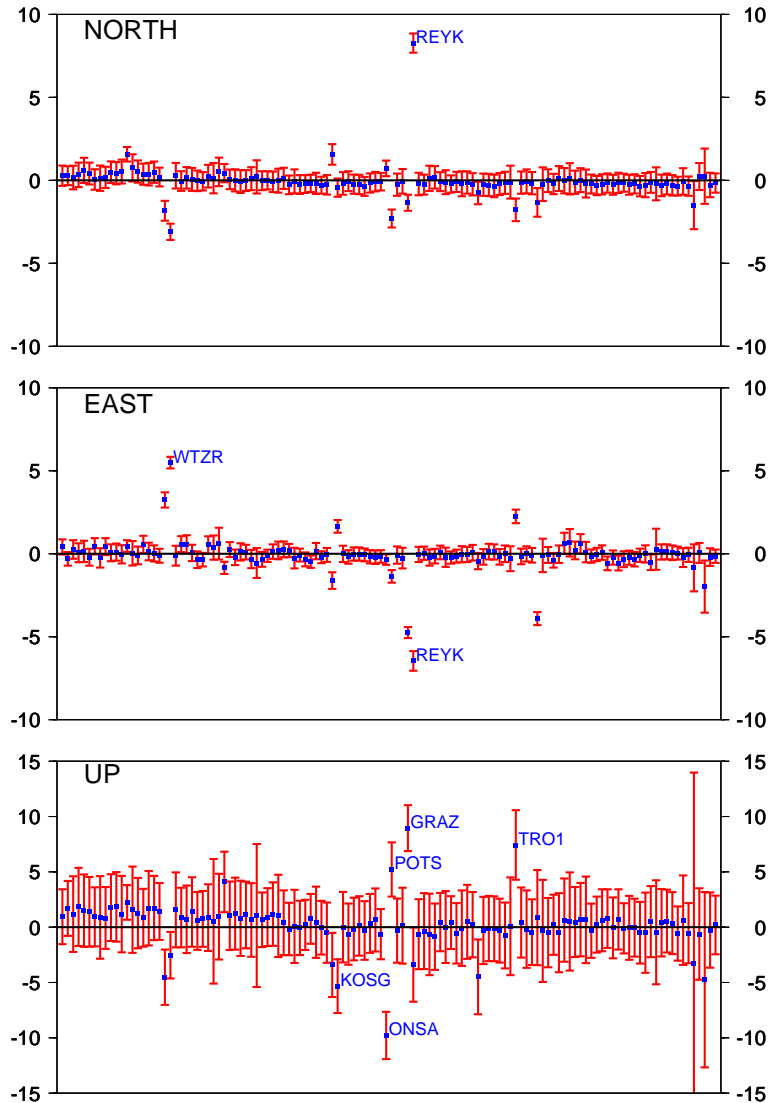
### Weighted Transformation





## Alignment using Minimum Constraints

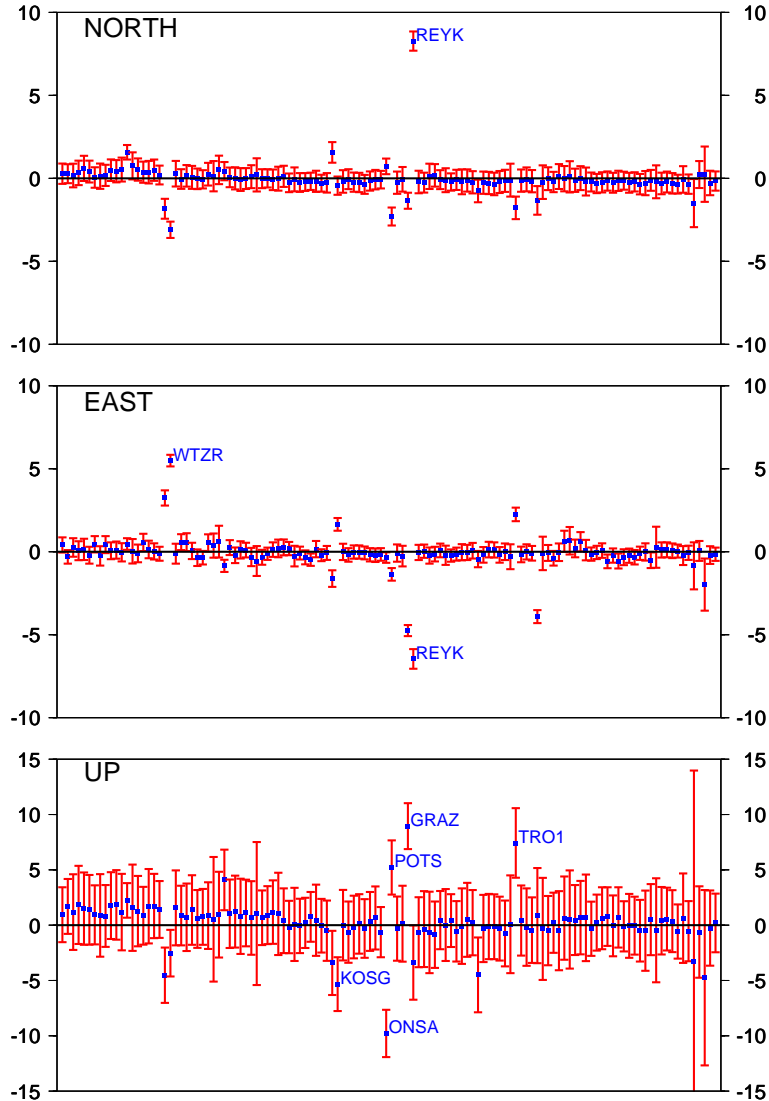
MC'd *minus* Constrained



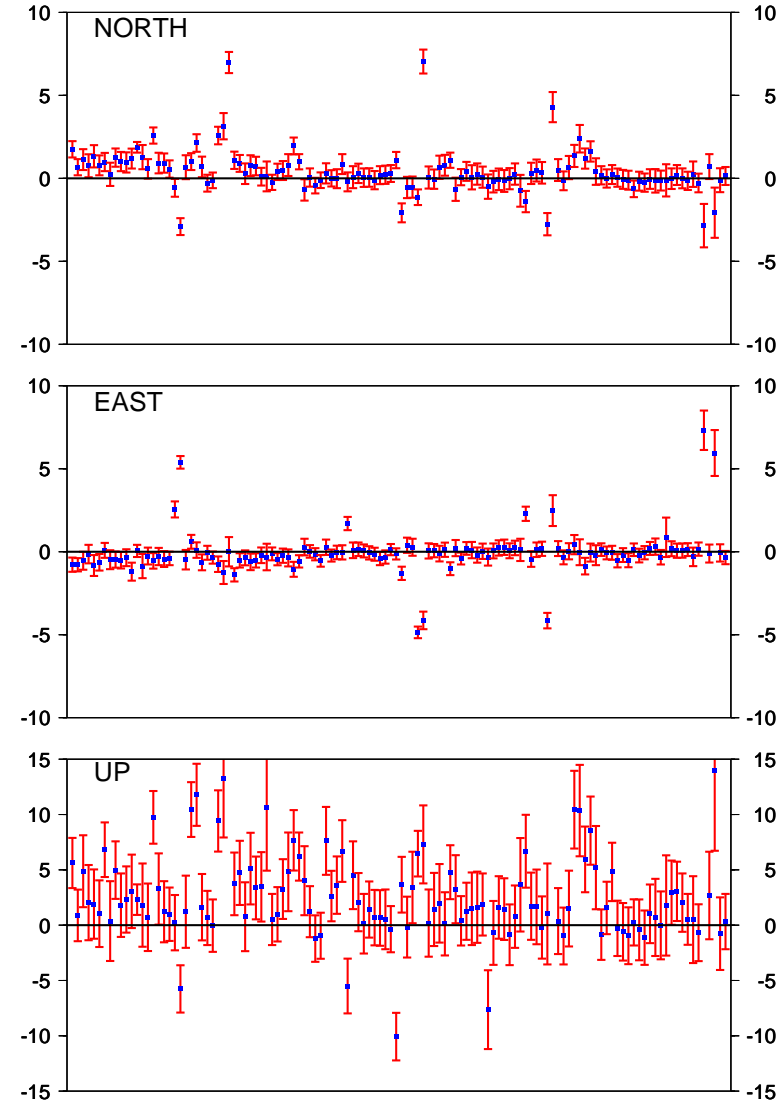


## Alignment using Minimum Constraints

MC'd *minus* Constrained

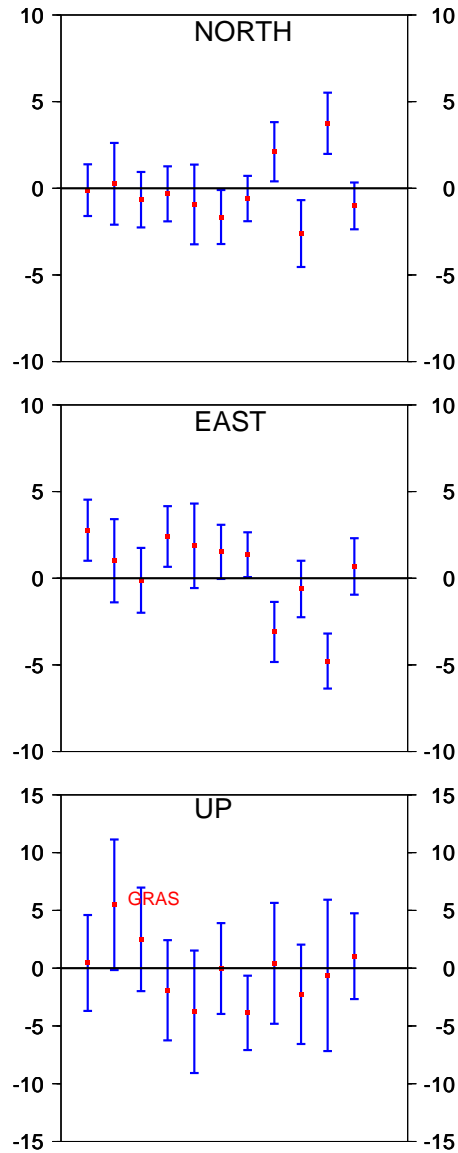


Transformed *minus* Constr'd

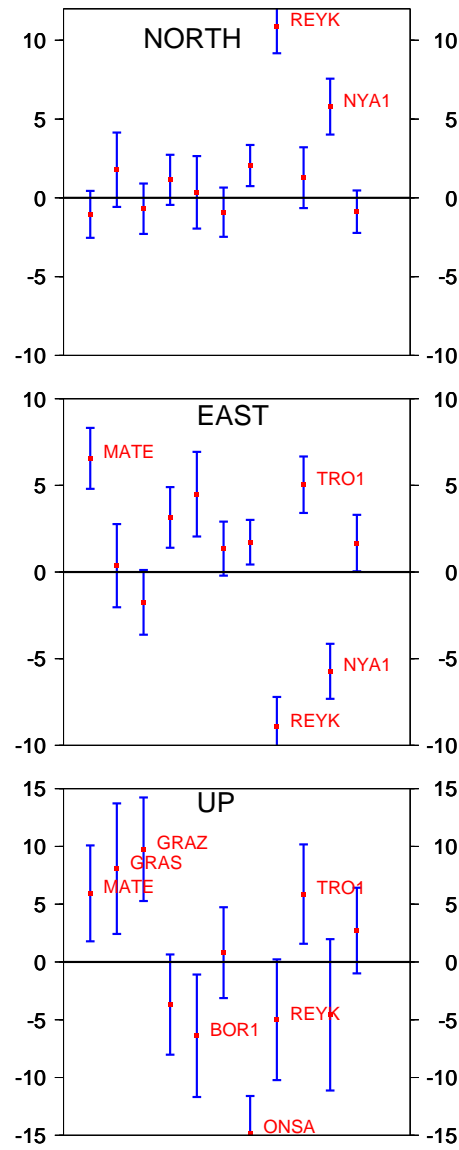




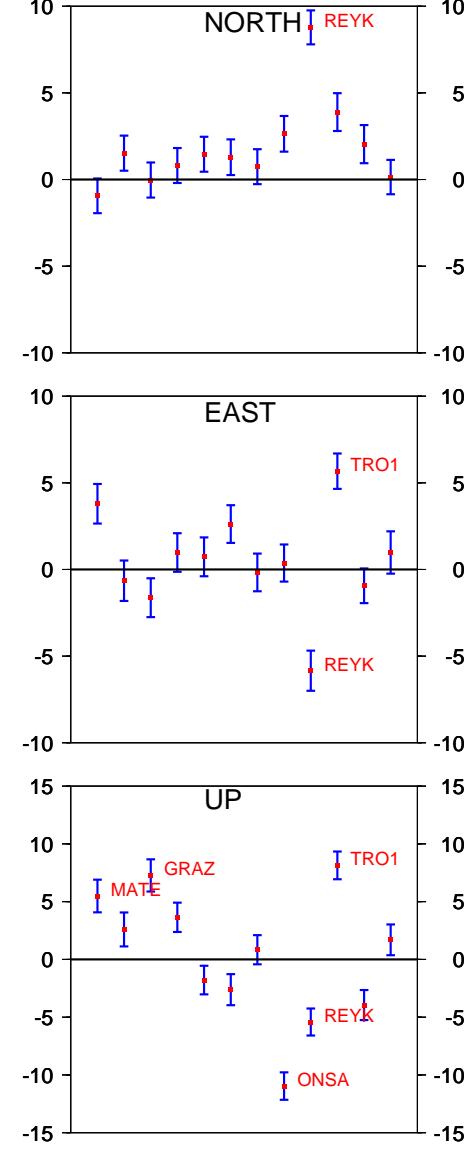
IGS(Wkly -Cum.)



IGS-Wkly -ITRF00

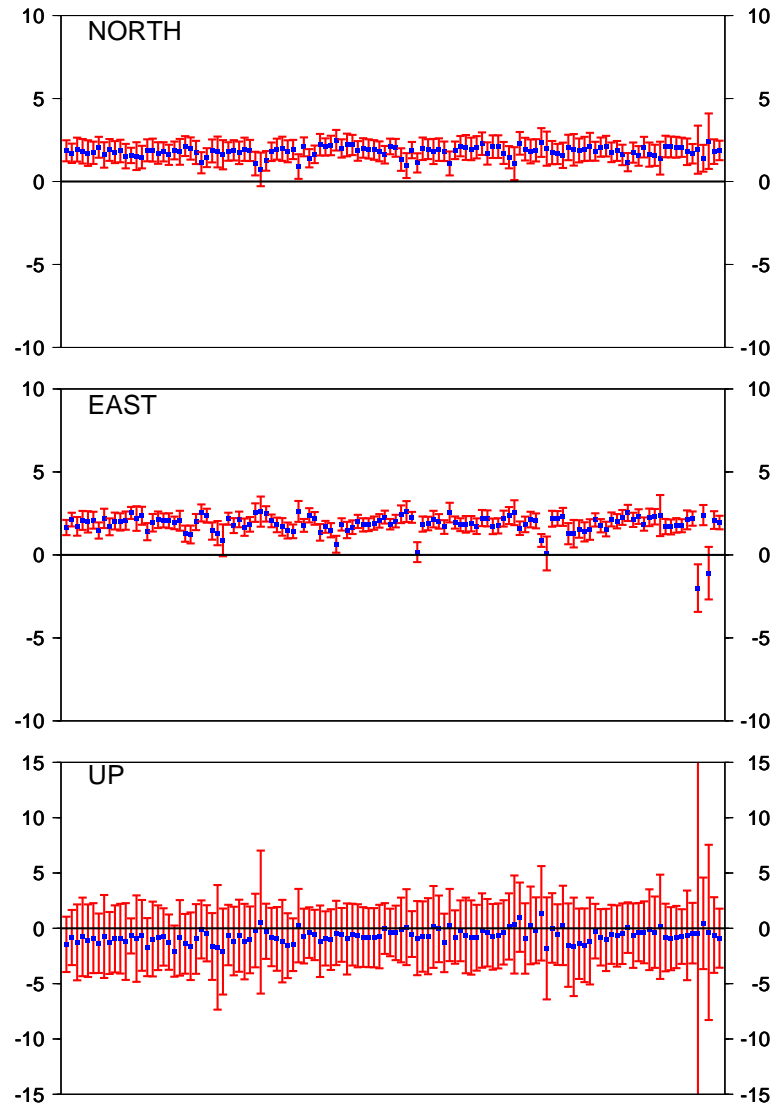


IGS-Cum. -ITRF00





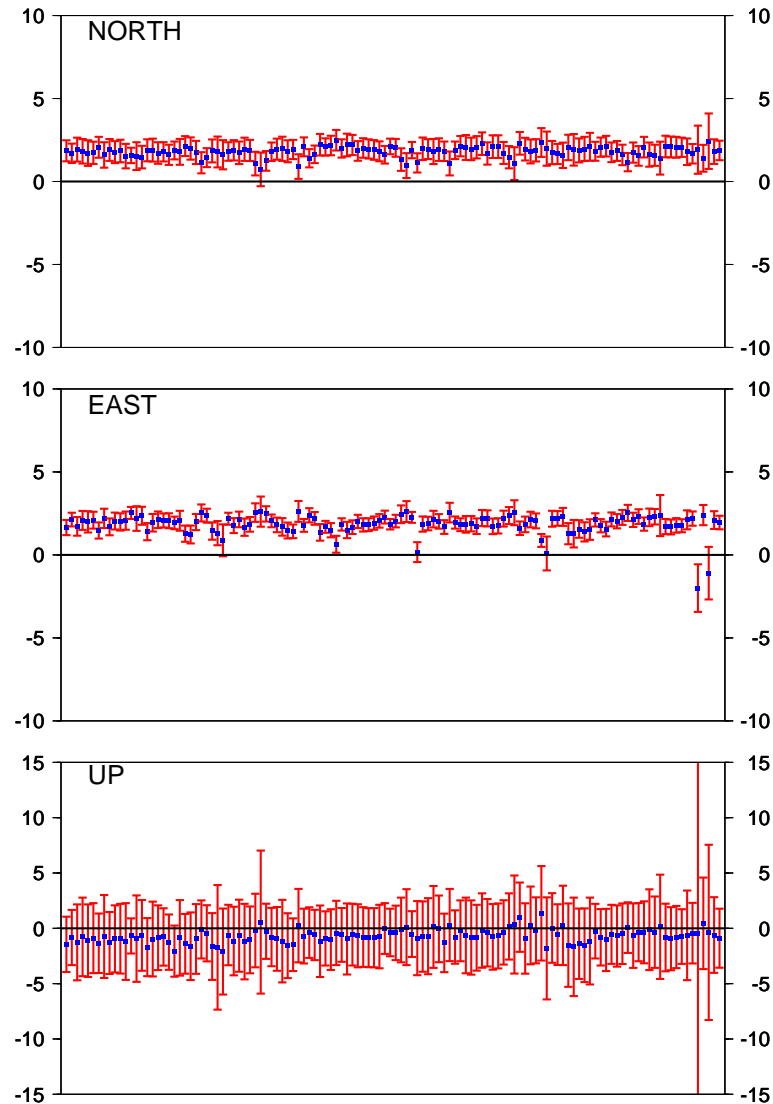
# Coord. Differences (MC'd/IGS) vs. (MC'd/ITRF2000) (12 Sta.) IGS-Wkly *minus* ITRF2000



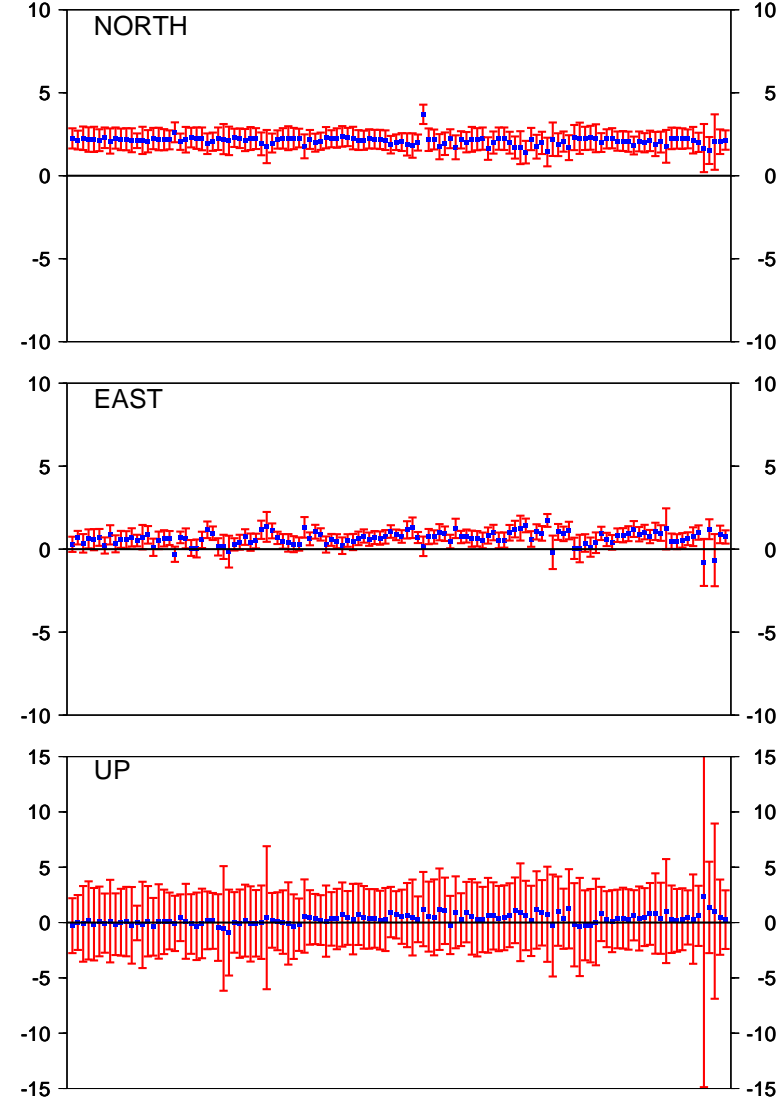


# Coord. Differences (MC'd/IGS) vs. (MC'd/ITRF2000) (12 Sta.)

## IGS-Wkly *minus* ITRF2000

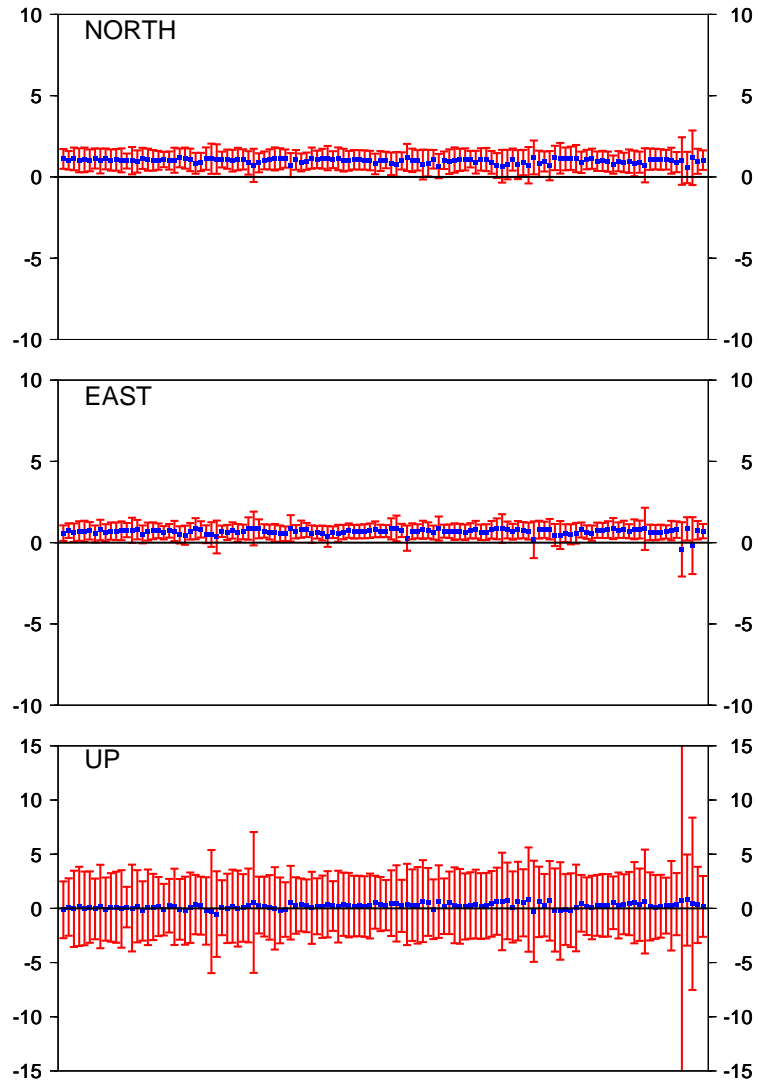


## IGS-Cum. *minus* ITRF2000





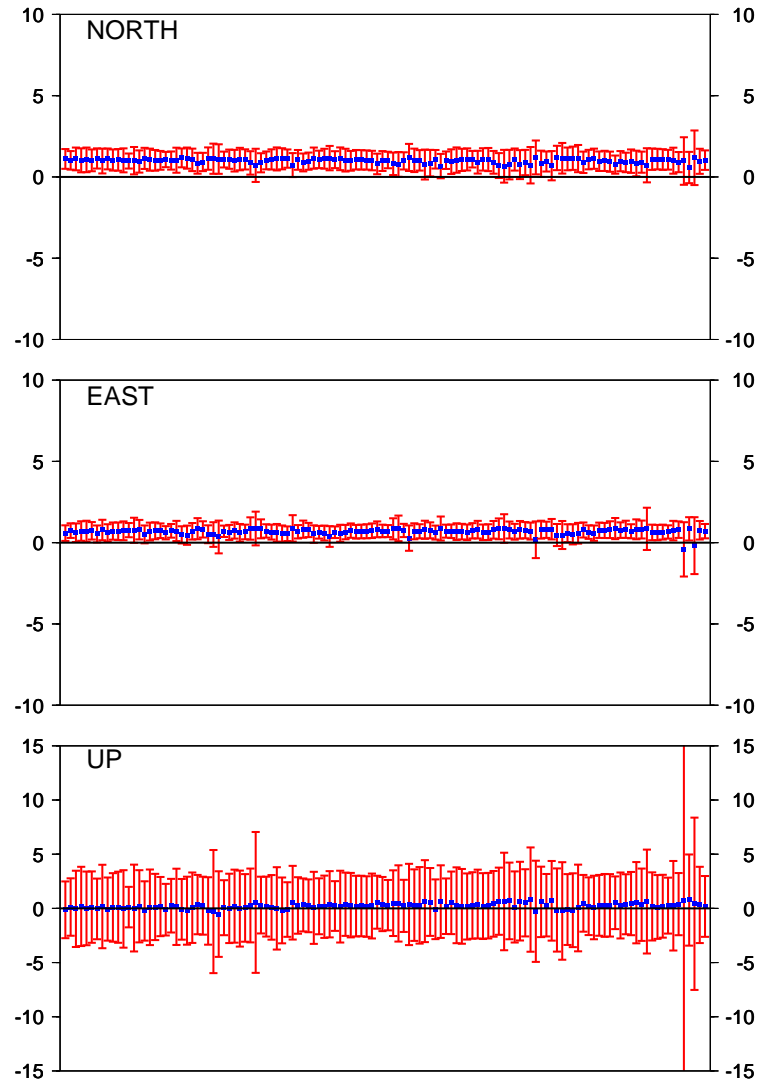
## Coord. Differences (MC'd/IGS) vs. (MC'd/ITRF2000) IGS-Cum. - ITRF2000(5 Sta.)



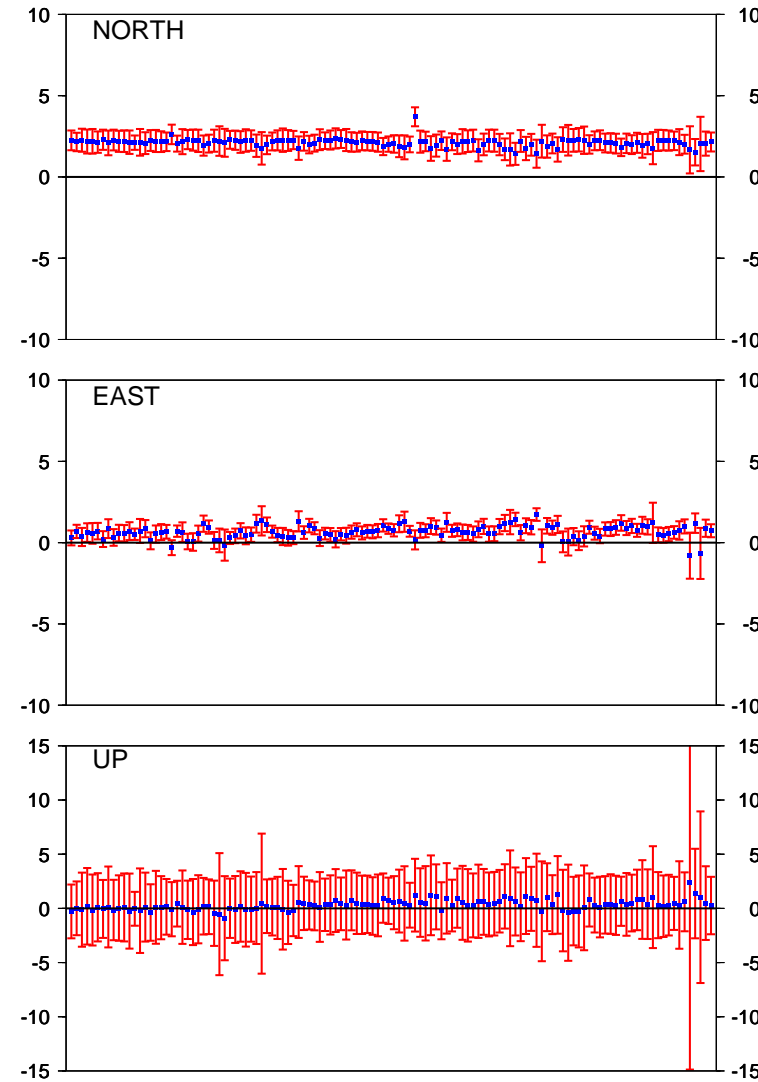


# Coord. Differences (MC'd/IGS) vs. (MC'd/ITRF2000)

## IGS-Cum. - ITRF2000(5 Sta.)



## IGS-Cum.- ITRF2000(12 Sta.)







## Combinaison de séries temporelles de positions

### Modèle $C_{ATREF}$

Entrée : Positions  $X(t_s)$  hebdomadaires, mensuelles, etc. (SINEX)

**Géocentre**

Sortie : Positions  $X(t_0)$ , vitesses  $\dot{X}$ , ( $\overbrace{T_x, T_y, T_z}^{\text{Géocentre}}, D, R_x, R_y, R_z$ )

- On suppose que chaque solution est exprimée dans RRT différent
- La matrice normale de la combinaison a un défaut de rang de 14
- Il faut donc définir le RRT en sortie de la combinaison:
  - en fixant (à des valeurs donnés) 14 paramètres parmi ceux à estimer
  - en rajoutant une équation de contraintes minimales:

$$B(X_{estim.} - X_{Ref.}) = 0 \quad (\Sigma_\theta)$$



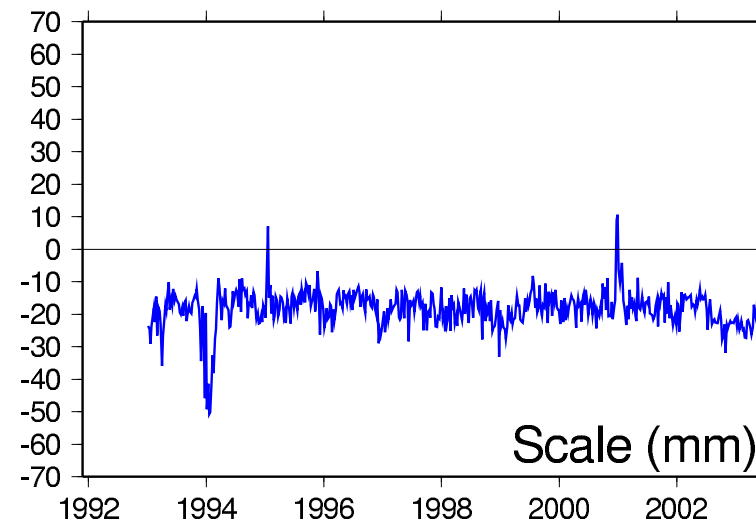
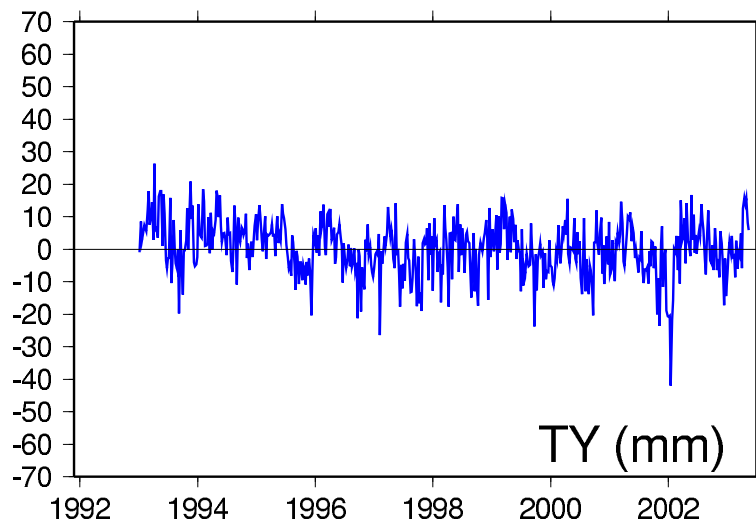
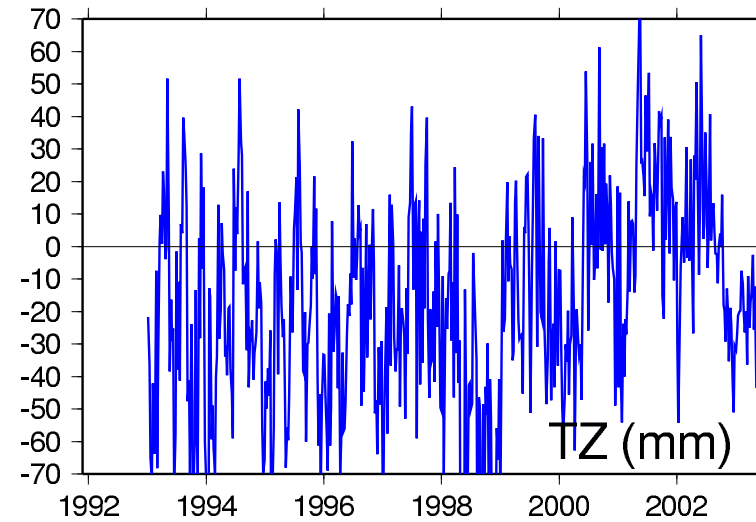
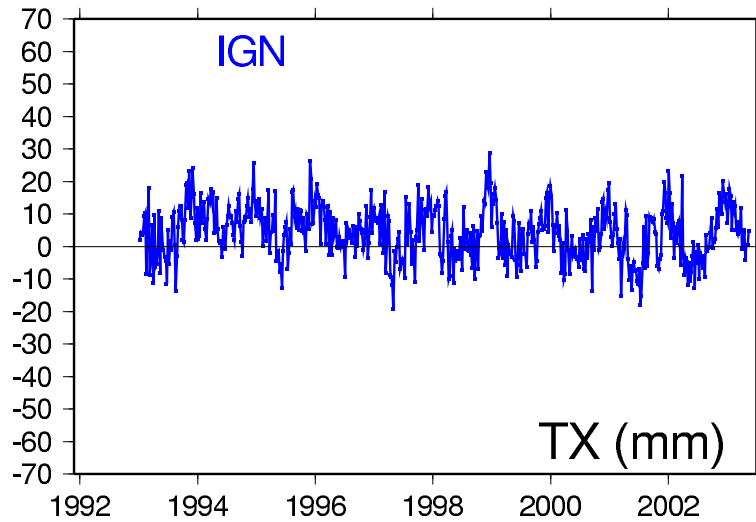
## Combinaison de séries temporelles de positions: résultats récents

### Donnée utilisées:

- **VLBI**: GSFC: sessions par 24h en sinex: 1990-2002
  
- **SLR**: ASI: solutions hebdomadaires : 1999-2002
  
- **GPS**:
  - IGS: solutions hebdomadaires combinées: 1999-2002
  - JPL: solutions hebdomadaires: 1996-2002
  
- **DORIS**: IGN: solutions hebdomadaires : 1993-2003

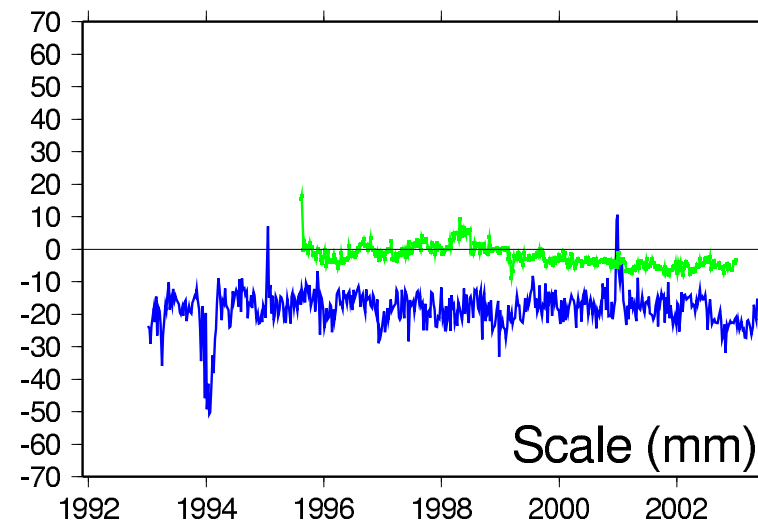
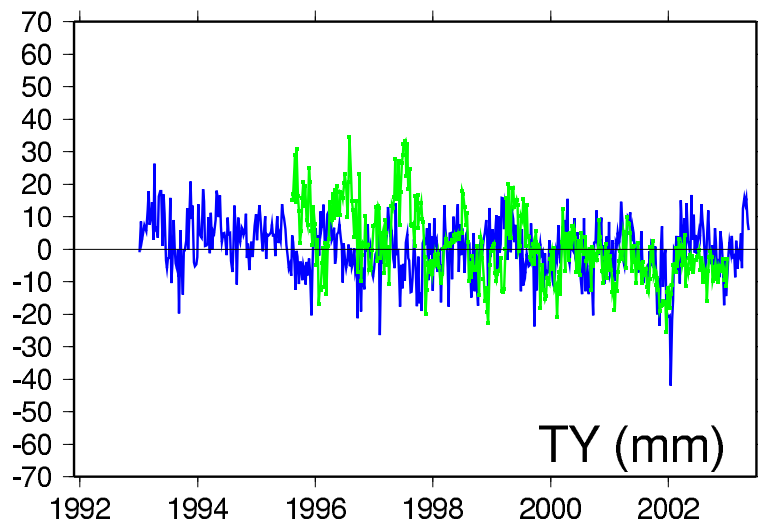
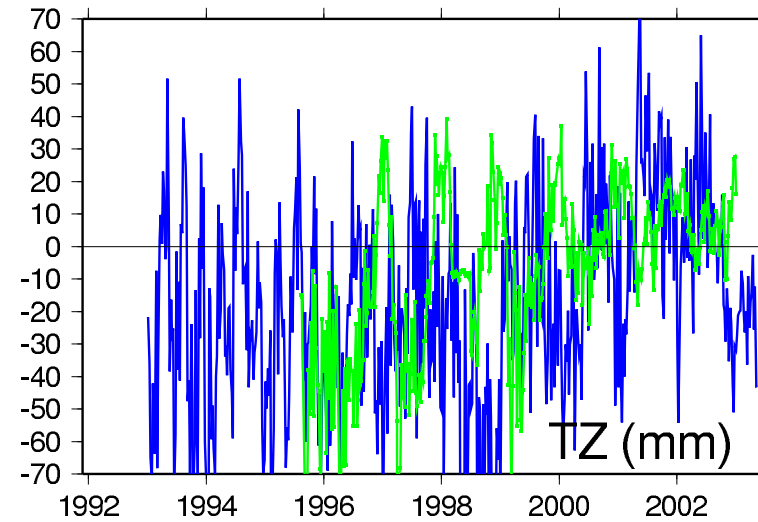
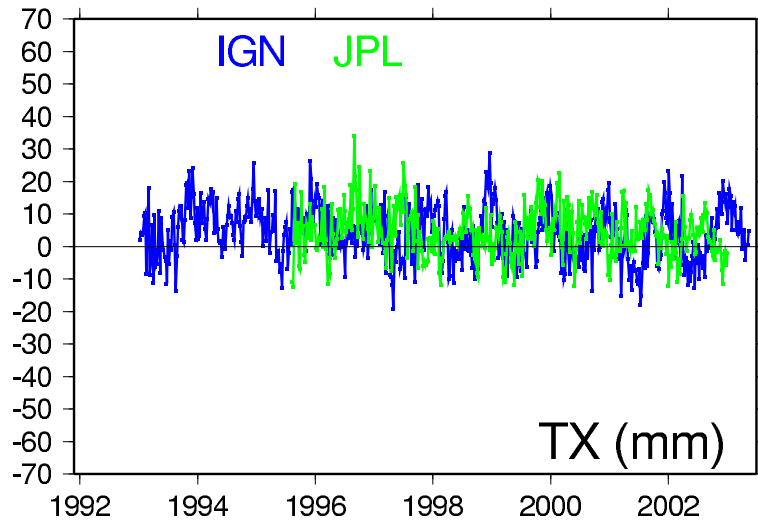


## Origin & Scale Variation



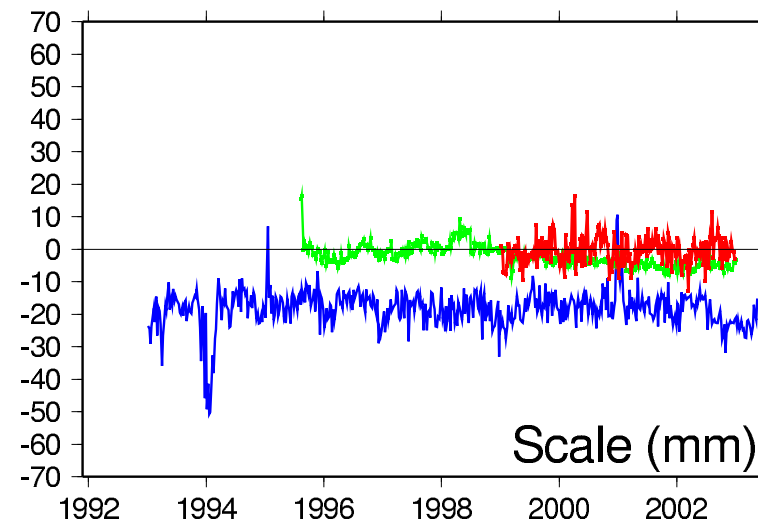
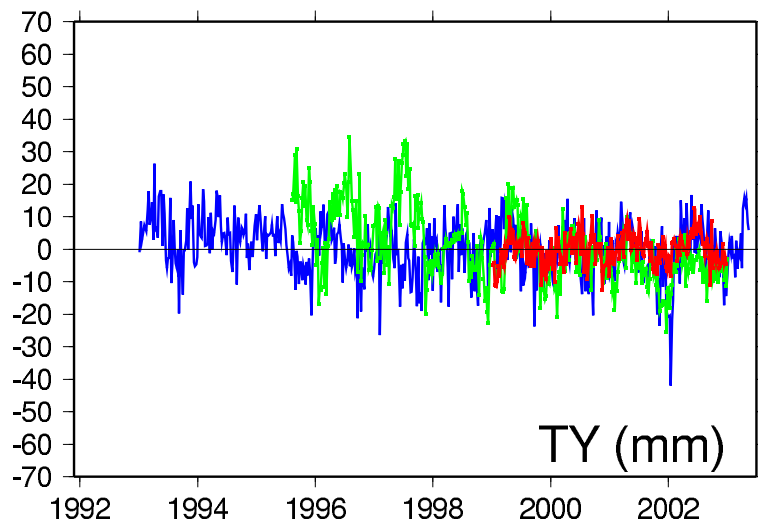
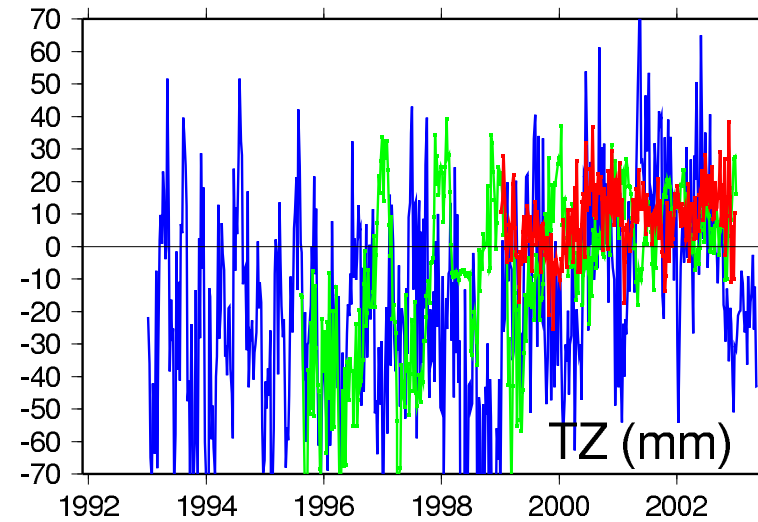
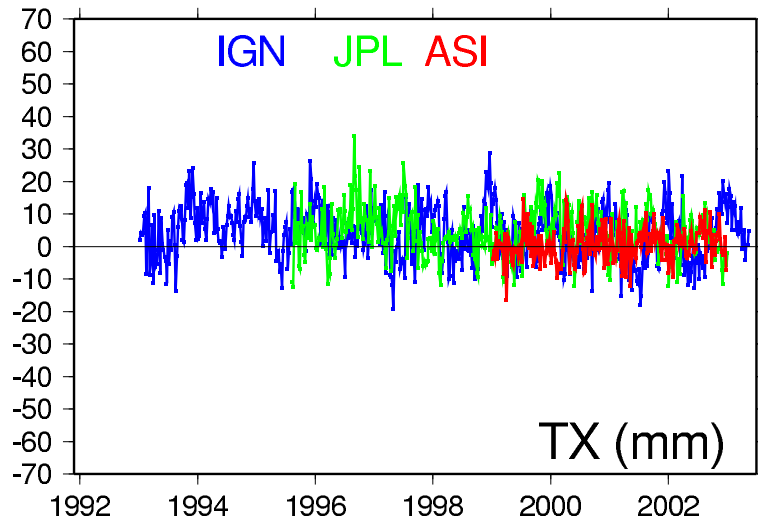


## Origin & Scale Variation



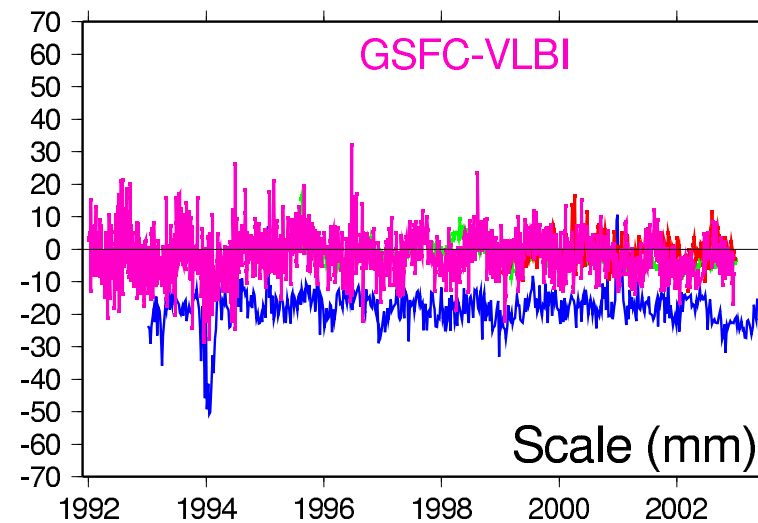
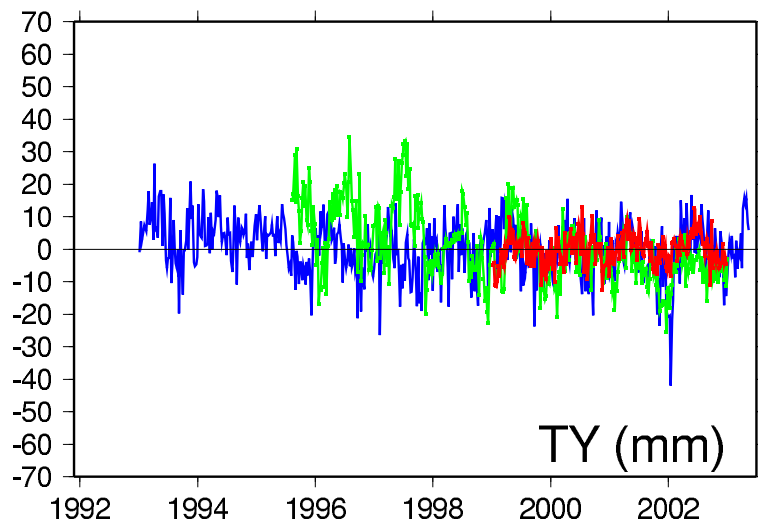
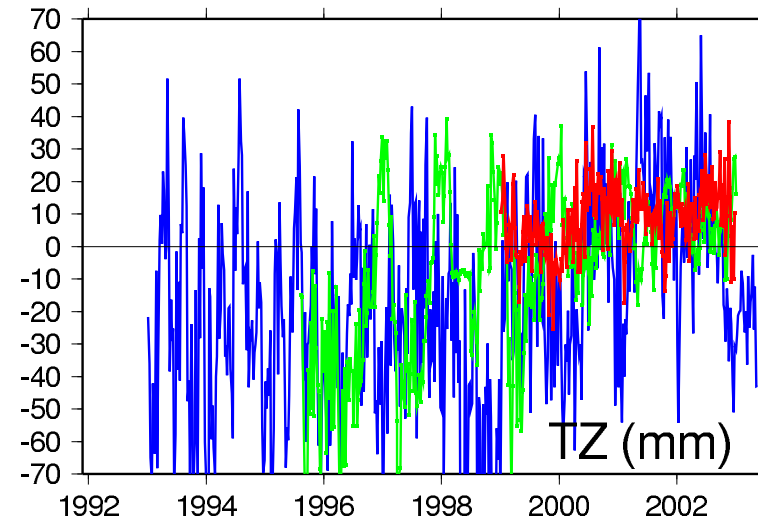
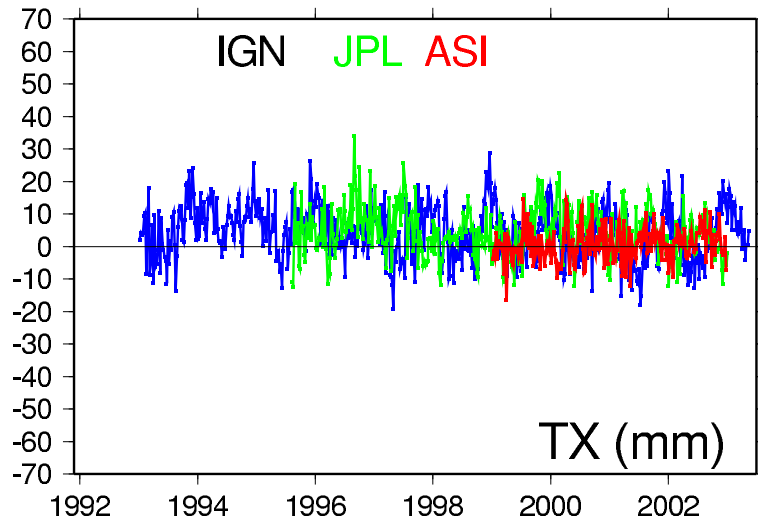


## Origin & Scale Variation





## Origin & Scale Variation





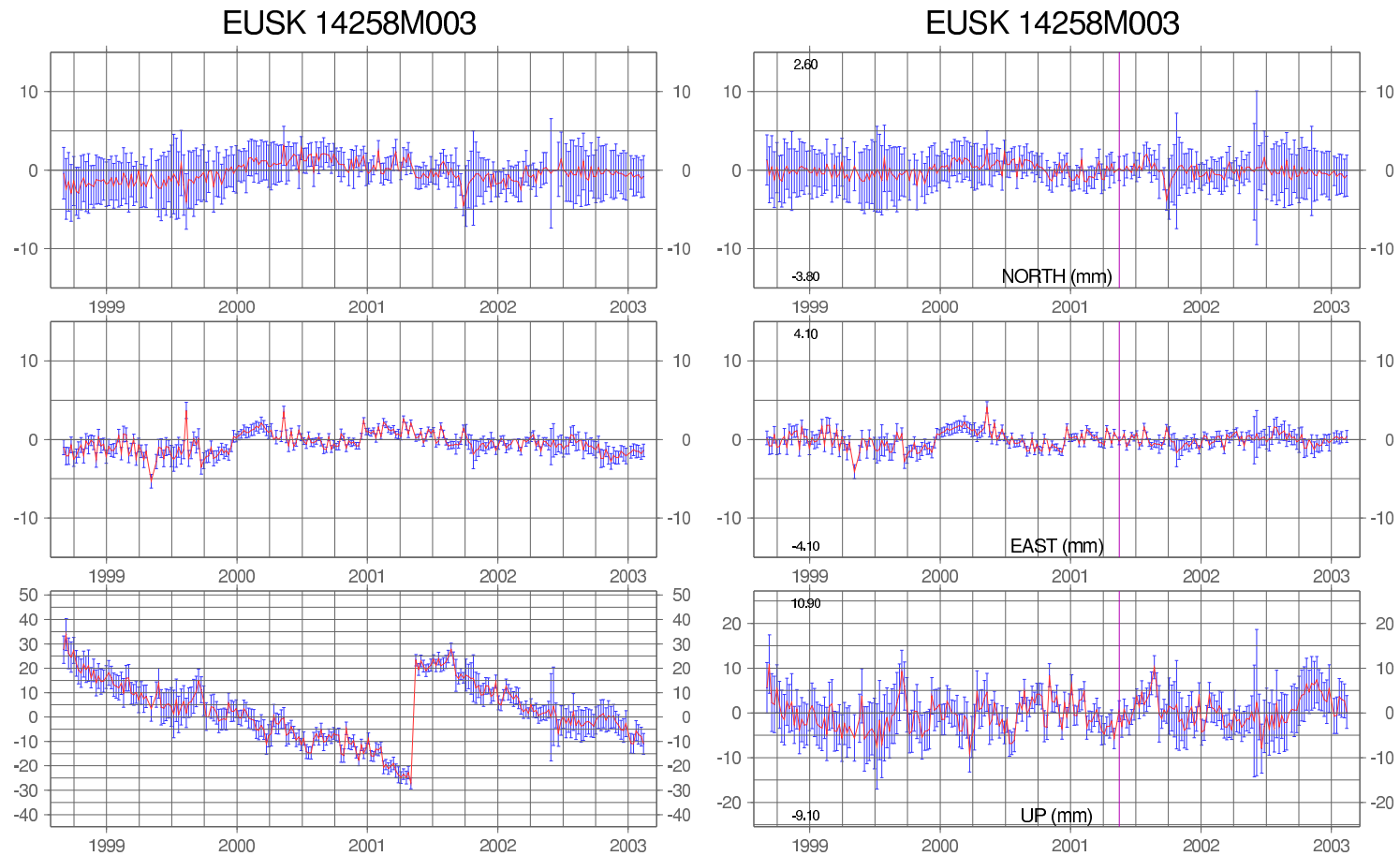
## Annual amplitude of geocenter components (mm)

$$dx(t) = A \cos(2\pi f(t - t_0) + \phi)$$

<b>Solution</b>	$T_x$	$T_y$	$T_z$
<b>SLR/ASI</b>	<b>2.2</b>	<b>3.3</b>	<b>2.8</b>
<b>GPS/JPL</b>	<b>4.1</b>	<b>7.2</b>	<b>15.8</b>
<b>DORIS/IGN-JPL</b>	<b>6.9</b>	<b>4.4</b>	<b>16.0</b>



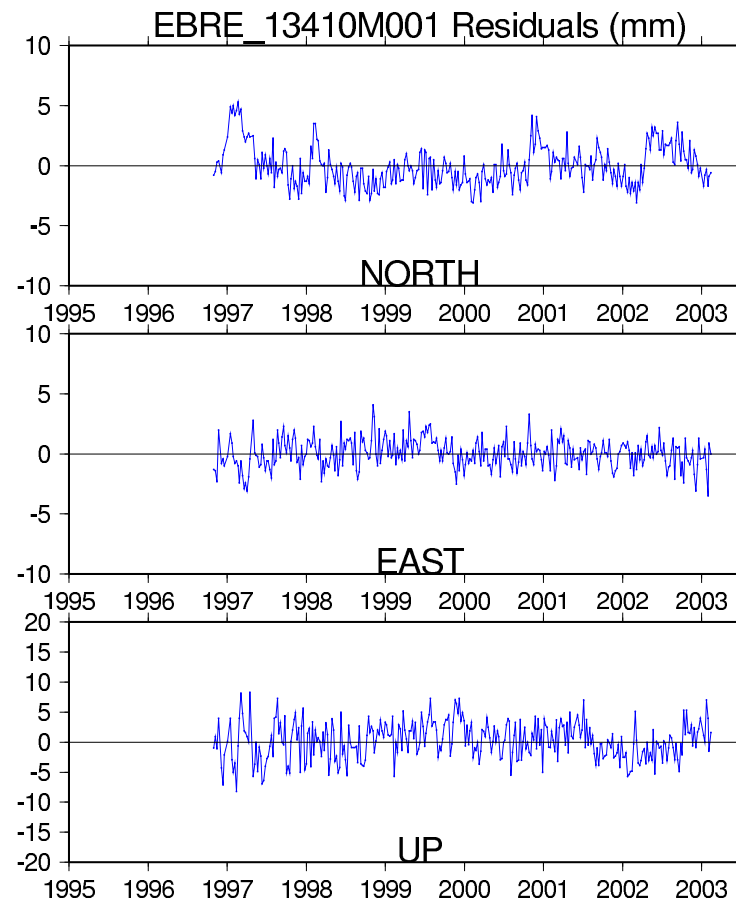
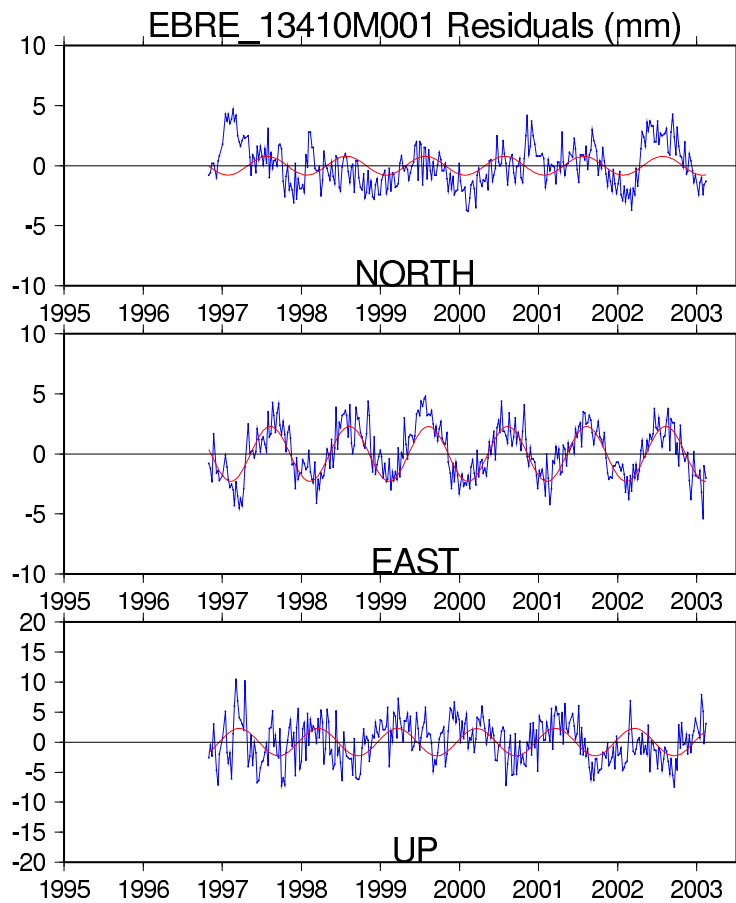
## Combinaison de séries temporelles de positions: traitement des discontinuités







**Variations saisonnières:**  $dx(t) = A \cdot \cos(\omega(t - t_0) + \phi)$





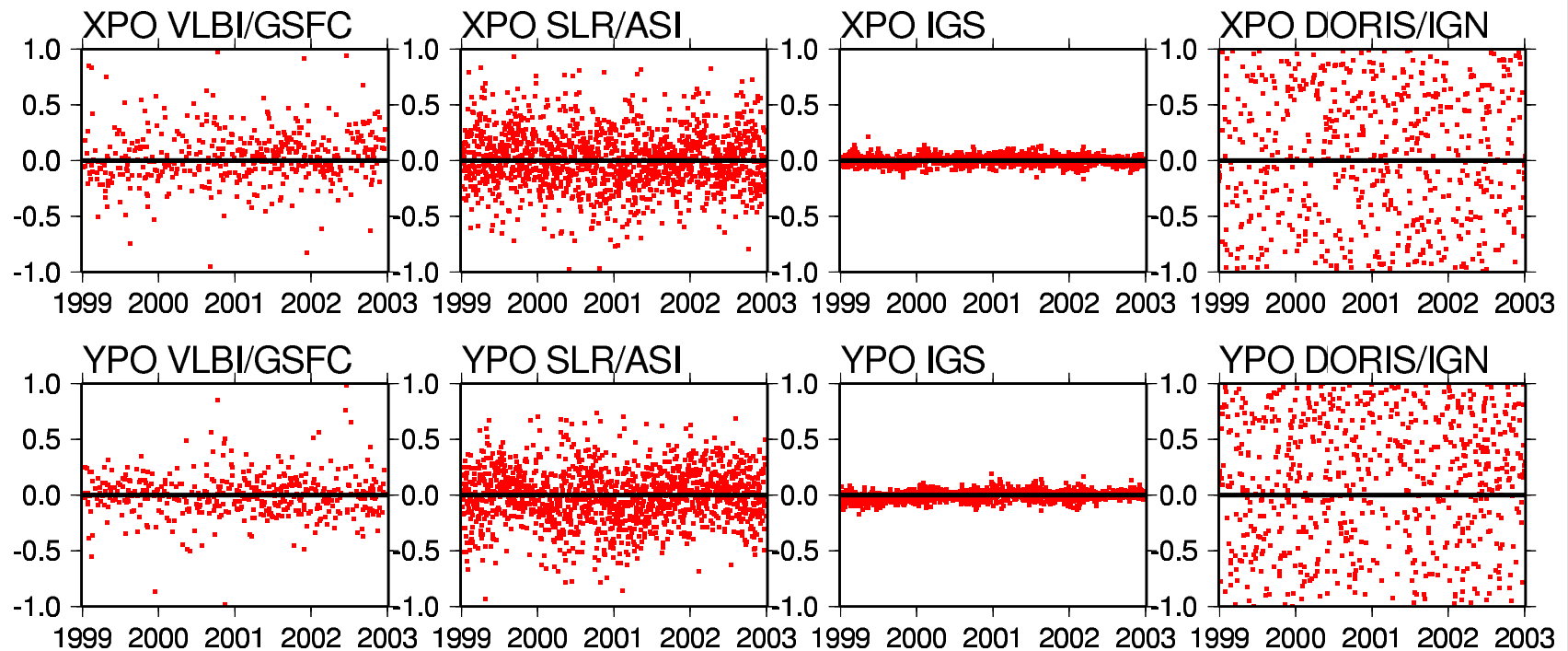
## Proposal for the next ITRF Solution

- **Based on "Weekly" solutions:**
  - includes EOP over 5 years : 1999 - 2003
  - Station positions using all available data (VLBI/SLR since 80's)
- **Better monitoring of station non-linear motions**
- **Could be available beginning 2004**

**A test Example follows**

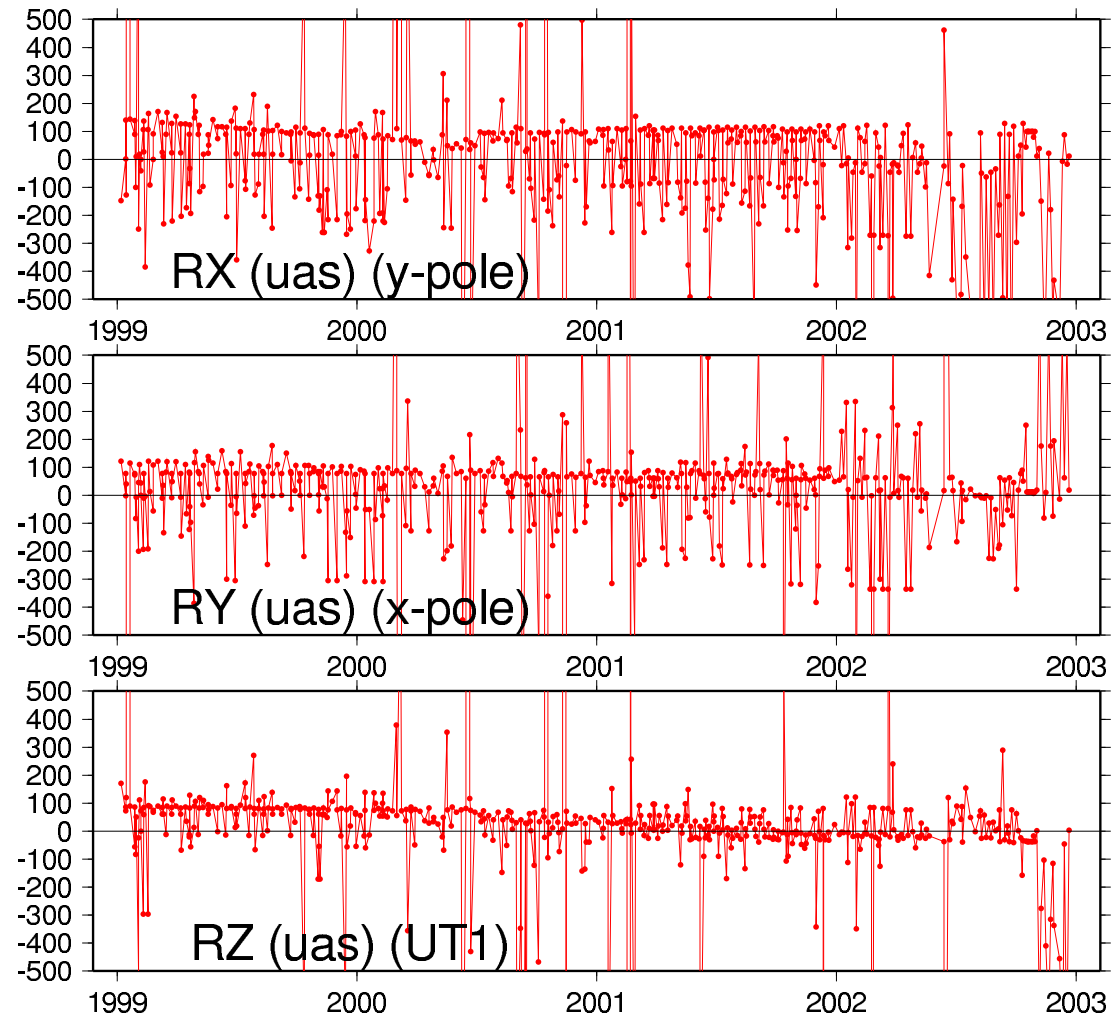


## (4-Years) multi-technique combination: PM Residuals (mas)



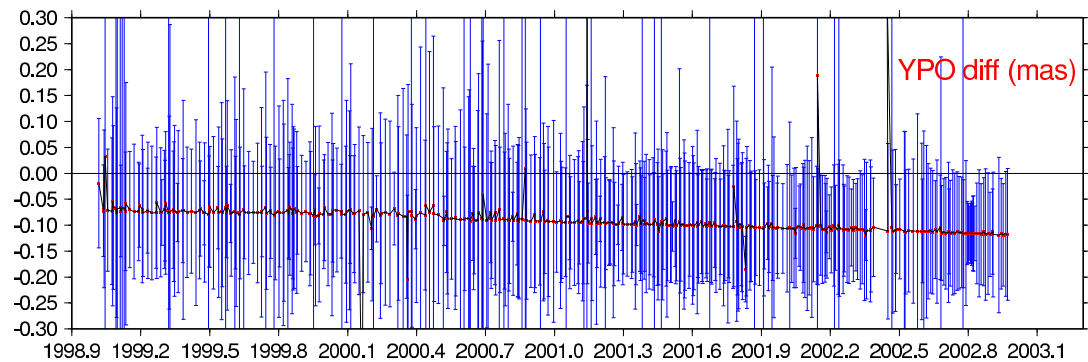
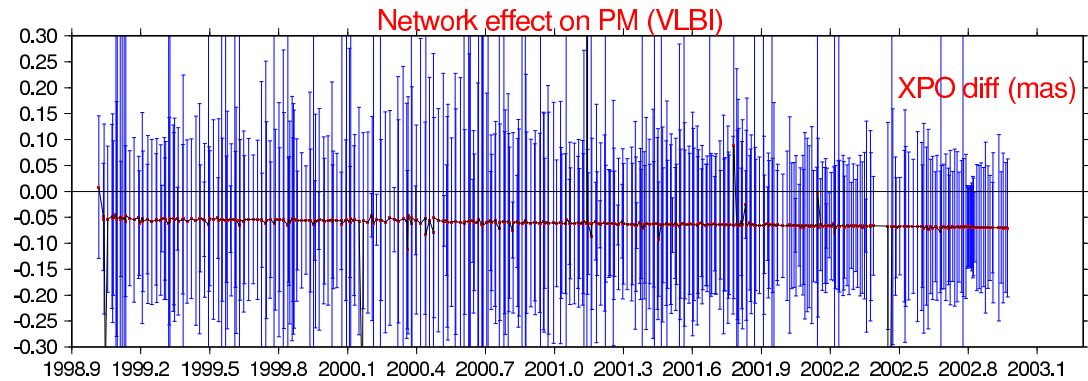
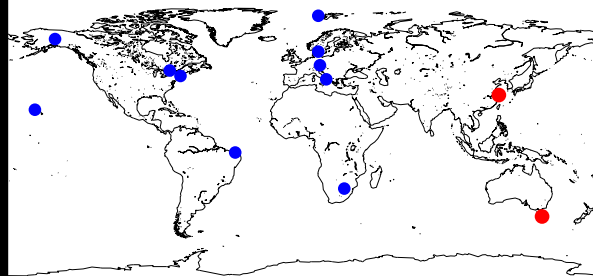


## VLBI TRF Orientation Stability: per day





# Polar Motion Analysis: Network effect (VLBI)





## Quality Evaluation: WRMS

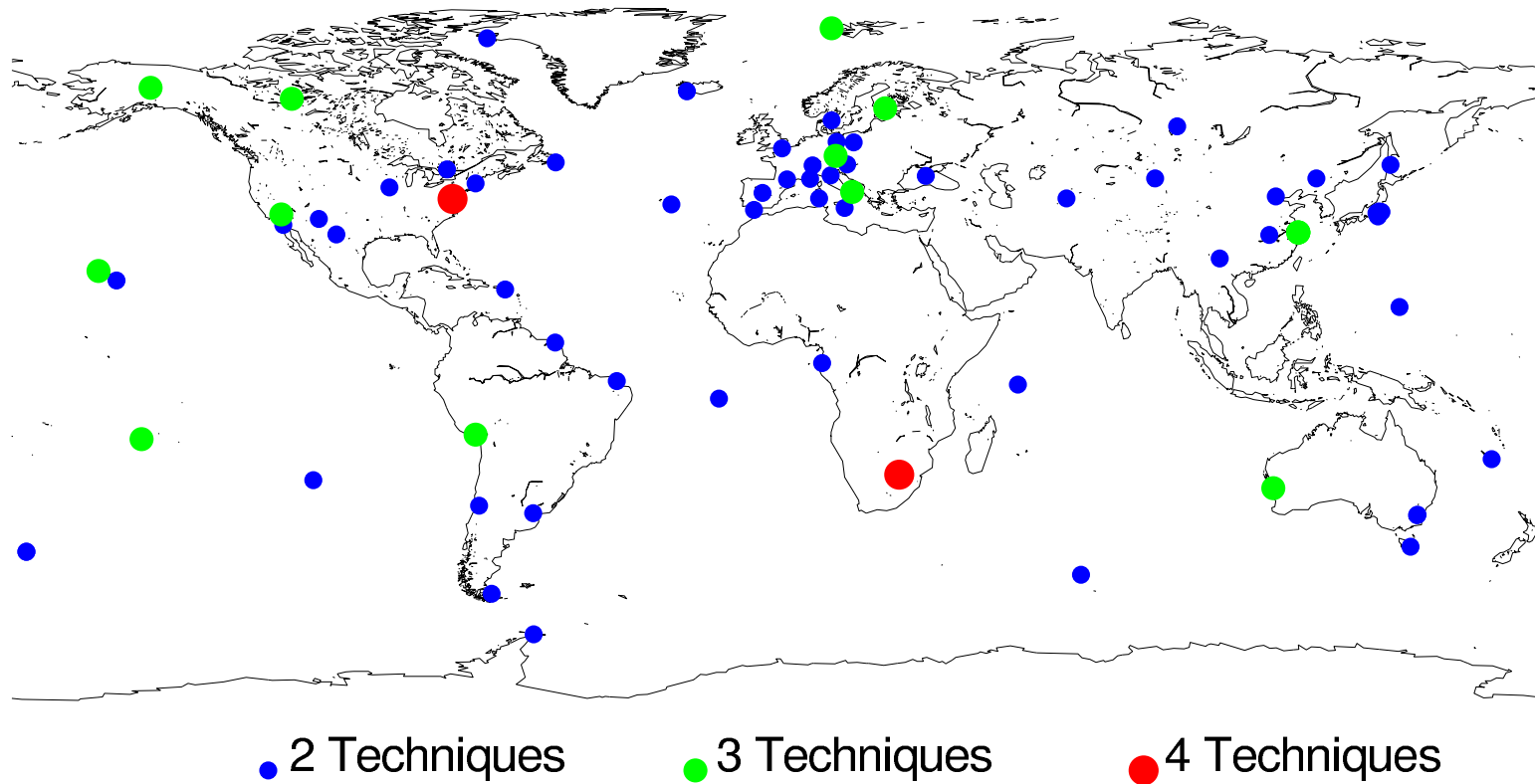
Tech/	$X$	$\dot{X}$	$x_p$	$y_p$	LOD	UT1
AC	mm	mm/yr	mas	mas	ms	ms
VLBI/GSFC	3.0	1.0	0.15	0.13	0.02	0.01
SLR (W)/ASI	3.4	1.8	0.20	0.20	0.15	
SLR (G)/ASI	15.1	3.0				
GPS /IGS	5.1	1.5	0.05	0.05	0.03	
DORIS/IGN-JPL	18.3	2.5	1.5	1.5	5.8	

SLR (W) : Derived from Weekly sinex files (1999-2002)

SLR(G) : Global position/velocity solution used in ITRF2000



## Etat actuel des co-localisations





## Etat actuel des réseaux par techniques

